# Plaquette 1 – Reconnaître, calculer, sommer

## Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Formules du cours sur les suites.**

— Suite **arithmétique** de raison $r$ : $u_{n+1} = u_n + r$, et terme général

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{ou} \qquad u_n = u_p + (n-p)r$$

— Suite **géométrique** de raison $q$ : $u_{n+1} = q \times u_n$, et terme général

$$u_n = u_0 \times q^n \qquad \text{ou} \qquad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

— Reconnaître : on calcule $u_{n+1} - u_n$ (constant ⇒ arithmétique) ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (constant ⇒ géométrique).

— Sommes à connaître :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

— Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique : nombre de termes $\times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

— Monotonie : une suite arithmétique est croissante si $r > 0$ ; une suite géométrique à termes positifs est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.

— Évolution en pourcentage : augmenter de $t\,\%$ revient à multiplier par $q = 1 + \dfrac{t}{100}$ — d'où une suite géométrique.

## Correction de l'exercice 1 – Reconnaître la nature d'une suite

a) $u_{n+1} - u_n = (5 + 3(n+1)) - (5 + 3n) = 3$. La différence est **constante** : la suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2 \times 4^{n+1}}{2 \times 4^n} = 4$. Le quotient est **constant** : la suite est géométrique de raison 4 et $v_0 = 2$.

c) $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui dépend de $n$ : elle n'est pas arithmétique. Et $\dfrac{w_1}{w_0}$ n'existe pas ($w_0 = 0$), tandis que $\dfrac{w_3}{w_2} = \dfrac{9}{4}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = 4$ : le quotient n'est pas constant non plus. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

**Réponse.** a) arithmétique ($r = 3$) · b) géométrique ($q = 4$) · c) ni l'une ni l'autre.

## Correction de l'exercice 2 – Terme général d'une suite arithmétique

Formule du cours : $u_n = u_0 + nr$.

— $u_{10} = 7 + 10 \times (-2) = 7 - 20 = -13$.

— On résout $7 - 2n = -35$ : $-2n = -42$, donc $n = 21$.

— Vérification :

$$u_{21} = 7 + 21 \times (-2) = 7 - 42 = -35$$

— La raison est négative : la suite est strictement décroissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $u_{10} = -13$ et $u_{21} = -35$.

## Correction de l'exercice 3 – Deux termes connus

On utilise la formule $u_n = u_p + (n-p)r$ avec $p = 3$ et $n = 8$ :

$$u_8 = u_3 + (8-3)r \Longrightarrow 31 = 11 + 5r$$

— Donc $5r = 20$ et $r = 4$.
— Puis $u_3 = u_0 + 3r$ donne $11 = u_0 + 12$, soit $u_0 = -1$.
— Vérification : $u_8 = -1 + 8 \times 4 = 31$. Correct.

**Réponse.** $r = 4$ et $u_0 = -1$.

## Correction de l'exercice 4 – Terme général d'une suite géométrique

Formule du cours : $v_n = v_0 \times q^n$.

— $v_5 = 250 \times 1{,}04^5$. Or $1{,}04^5 \approx 1{,}216\,653$, donc $v_5 \approx 304{,}16$.
— $v_{10} = 250 \times 1{,}04^{10} \approx 250 \times 1{,}480\,244 \approx 370{,}06$.
— Interprétation : c'est un capital de 250 € placé à 4 % par an ; il atteint environ 370 € au bout de 10 ans.

**Piège.** On calcule $q^n$ **avant** de multiplier par $v_0$, et on n'arrondit qu'à la fin.

**Réponse.** $v_5 \approx 304{,}16$ et $v_{10} \approx 370{,}06$.

## Correction de l'exercice 5 – Évolution en pourcentage

a) Diminuer de 1,5 % revient à multiplier par le coefficient

$$q = 1 - \frac{1{,}5}{100} = 0{,}985$$

— La suite est donc **géométrique** de raison 0,985 et de premier terme $p_0 = 12\,000$, d'où $p_n = 12\,000 \times 0{,}985^n$.

b) $p_4 = 12\,000 \times 0{,}985^4$.

— $0{,}985^4 \approx 0{,}941\,336$, donc $p_4 \approx 11\,296$ habitants.
— Vérification de l'ordre de grandeur : une baisse de 1,5 % par an pendant 4 ans représente un peu moins de 6 %, soit environ 700 habitants de moins. Cohérent.

**Réponse.** a) $p_n = 12\,000 \times 0{,}985^n$ · b) $p_4 \approx 11\,296$ habitants.

## Correction de l'exercice 6 – Somme des premiers entiers

Formule du cours : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

— $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5\,050$.
— Pour $T$, on peut soustraire deux sommes : $T = (1 + \cdots + 60) - (1 + \cdots + 19)$.
— $1 + \cdots + 60 = \dfrac{60 \times 61}{2} = 1\,830$ et $1 + \cdots + 19 = \dfrac{19 \times 20}{2} = 190$.
— Donc $T = 1\,830 - 190 = 1\,640$.
— Contrôle par l'autre méthode : $T$ compte $60 - 20 + 1 = 41$ termes, de moyenne $\dfrac{20 + 60}{2} = 40$, donc $T = 41 \times 40 = 1\,640$. Même résultat.

**Réponse.** $S = 5\,050$ et $T = 1\,640$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 7 – Somme de termes d'une suite arithmétique

Méthode du cours : une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

— Nombre de termes : de $u_0$ à $u_{20}$, il y a 21 termes.
— Dernier terme : $u_{20} = 3 + 20 \times 5 = 103$.
— Somme : $21 \times \dfrac{3 + 103}{2} = 21 \times 53 = 1\,113$.
— Contrôle avec la formule des entiers : $\sum_{k=0}^{20} (3 + 5k) = 21 \times 3 + 5 \times \dfrac{20 \times 21}{2} = 63 + 1\,050 = 1\,113$. Cohérent.

**Réponse.** 1 113.

## Correction de l'exercice 8 – Somme de termes d'une suite géométrique

Formule du cours : pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

— Pour $S$ : $q = 3$ et $n = 10$, donc $S = \dfrac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = \dfrac{1 - 177\,147}{-2} = \dfrac{-177\,146}{-2} = 88\,573$.
— Pour $S'$ : la parenthèse vaut $\dfrac{1 - 0{,}5^7}{1 - 0{,}5} = \dfrac{1 - 0{,}007\,812\,5}{0{,}5} = 1{,}984\,375$.
— Donc $S' = 5 \times 1{,}984\,375 = 9{,}921\,875 \approx 9{,}922$.
— Remarque : la somme des puissances de 0,5 ne dépasse jamais 2, quel que soit le nombre de termes.

**Réponse.** $S = 88\,573$ et $S' \approx 9{,}922$.

## Correction de l'exercice 9 – Monotonie d'une suite

— a) Suite arithmétique de raison $r = -0{,}5 < 0$ : elle est strictement **décroissante**.
— b) Suite géométrique de premier terme positif et de raison $q = 1{,}2 > 1$ : elle est strictement **croissante** (croissance exponentielle).
— c) Suite géométrique de premier terme positif et de raison $q = 0{,}9$ avec $0 < q < 1$ : elle est strictement **décroissante**, et ses termes se rapprochent de 0.
— Justification générale pour b) et c) : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$, donc si $q > 1$ chaque terme est plus grand que le précédent (termes positifs), et si $0 < q < 1$ il est plus petit.

**Réponse.** a) décroissante · b) croissante · c) décroissante.

## Correction de l'exercice 10 – Problème de seuil

a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,03 : la suite est géométrique.

$$C_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$$

b) On calcule de proche en proche :

| $n$ | **10** | **11** | **12** | **13** |
|---|---|---|---|---|
| $C_n$ (€) | 2 687,83 | 2 768,47 | 2 851,52 | 2 937,07 |

— $C_{10} \approx 2\,687{,}83 < 2\,700$ et $C_{11} \approx 2\,768{,}47 > 2\,700$.
— C'est donc au bout de 11 **ans** que le capital dépasse 2 700 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Algorithme de seuil : on multiplie tant que le seuil n'est pas atteint.

```
def seuil():
    c = 2000
    n = 0
    while c <= 2700:
        c = c * 1.03
        n = n + 1
    return n
```

— La boucle *while* s'arrête dès que $c > 2\,700$ ; la fonction renvoie 11.

**Réponse.** a) $C_n = 2\,000 \times 1{,}03^{\,n}$ · b) au bout de 11 ans (≈ 2 768 €).

## Correction de l'exercice 11 – Une suite récurrente ramenée à une suite géométrique

a) $u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4$, $u_2 = 3 \times 4 - 2 = 10$ et $u_3 = 3 \times 10 - 2 = 28$. Les différences successives valent 2, 6 et 18 : elles ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique. Les quotients valent 2, 2,5 et 2,8 : elle n'est pas géométrique non plus.

b) On exprime $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1) = 3v_n$$

La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 1$. Ainsi $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n + 1 = 3^n + 1$.

**Contrôle** : $u_3 = 3^3 + 1 = 28$, conforme au calcul de a). On obtient $u_n = 3^n + 1$.

**Réponse.** a) 4, 10, 28 ; ni arithmétique ni géométrique · b) $(v_n)$ géométrique de raison 3, $u_n = 3^n + 1$.

## Correction de l'exercice 12 – Intérêts simples ou composés

**Intérêts simples.** On ajoute chaque année la même somme, 5 % de 1000 €, soit 50 € : le capital forme une suite arithmétique de raison 50, et $a_n = 1000 + 50n$.

**Intérêts composés.** Chaque année, le capital est multiplié par $1 + \dfrac{5}{100} = 1{,}05$ : c'est une suite géométrique de raison 1,05, et $g_n = 1000 \times 1{,}05^n$.

Après 10 ans :

$$a_{10} = 1000 + 500 = 1500 \qquad g_{10} = 1000 \times 1{,}05^{10} \approx 1628{,}89$$

Les intérêts composés rapportent environ 128,89 € de plus, car ils produisent eux-mêmes des intérêts. L'écart grandit avec le temps : une croissance géométrique finit toujours par distancer une croissance arithmétique. Après 10 ans : 1500 **€** contre environ 1628,89 **€**.

**Réponse.** $a_n = 1000 + 50n$ et $g_n = 1000 \times 1{,}05^n$ ; après 10 ans, 1500 € contre ≈ 1628,89 €.

## Correction de l'exercice 13 – Compter les termes d'une somme

Les termes augmentent de 3 à chaque fois : ce sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 3, de terme général $5 + 3k$.

Il faut d'abord compter les termes. Le dernier vérifie $5 + 3k = 302$, soit $3k = 297$ et $k = 99$ : les rangs vont de 0 à 99, ce qui fait 100 termes.

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut le nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$S = 100 \times \frac{5 + 302}{2} = 100 \times 153{,}5 = 15\,350$$

**Piège** : compter $\frac{302 - 5}{3} = 99$ termes en oubliant le premier. On trouve $S = 15\,350$.

**Réponse.** 100 termes ; $S = 15\,350$.

## Correction de l'exercice 14 – Variations et seuil d'une suite géométrique

a) La suite est géométrique de premier terme $4 > 0$ et de raison $0{,}9$, comprise entre 0 et 1. On le vérifie par la différence :

$$u_{n+1} - u_n = 4 \times 0{,}9^n \times (0{,}9 - 1) = -0{,}4 \times 0{,}9^n < 0$$

La suite est donc **décroissante**.

b) $u_n < 1$ équivaut à $0{,}9^n < 0{,}25$. La suite étant décroissante, il suffit de trouver le premier rang où l'inégalité est vraie. À la calculatrice, $0{,}9^{13} \approx 0{,}254 \geq 0{,}25$ et $0{,}9^{14} \approx 0{,}229 < 0{,}25$.

**Contrôle** : $u_{13} \approx 1{,}017$ et $u_{14} \approx 0{,}915$. Le plus petit entier cherché est $n = 14$.

**Réponse.** a) décroissante · b) $n = 14$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : amortissement d'un prêt

Les versements forment une suite **arithmétique** de premier terme $a_1 = 150$ et de raison $r = 10$.

a) $a_{12} = a_1 + 11r = 150 + 110 = 260$ €.

b) Somme de 12 termes consécutifs :

$$S_{12} = 12 \times \frac{150 + 260}{2} = 12 \times 205 = 2\,460 \text{ €}$$

c) Pour $n$ mois, le dernier versement vaut $150 + (n-1) \times 10 = 140 + 10n$, donc

$$S_n = n \times \frac{150 + 140 + 10n}{2} = n \times \frac{290 + 10n}{2} = 5n^2 + 145n$$

— On cherche le plus petit $n$ tel que $5n^2 + 145n > 5\,000$, soit $n^2 + 29n - 1\,000 > 0$.
— Discriminant : $\Delta = 29^2 + 4\,000 = 841 + 4\,000 = 4\,841$, et $\sqrt{4\,841} \approx 69{,}58$.
— Racine positive : $n = \frac{-29 + 69{,}58}{2} \approx 20{,}29$.
— Le trinôme est positif au-delà de cette racine : il faut donc $n \geq 21$.
— Vérification : $S_{20} = 5 \times 400 + 2\,900 = 4\,900 < 5\,000$ et $S_{21} = 5 \times 441 + 3\,045 = 2\,205 + 3\,045 = 5\,250 > 5\,000$.
— Conclusion : le total dépasse 5 000 € au bout de 21 **mois**.

**Réponse.** a) 260 € · b) 2 460 € · c) 21 mois ($S_{21} = 5\,250$ €).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).