

Plaquette 1 - Reconnaître, calculer, sommer

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours sur les suites.

- Suite **arithmétique** de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$, et terme général

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

- Suite **géométrique** de raison q : $u_{n+1} = q \times u_n$, et terme général

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

- Reconnaître : on calcule $u_{n+1} - u_n$ (constant $\Rightarrow$ arithmétique) ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (constant $\Rightarrow$ géométrique).

- Sommes à connaître :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}.$$

- Monotonie : une suite arithmétique est croissante si $r > 0$; une suite géométrique à termes positifs est croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.

- Évolution en pourcentage : augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $q = 1 + \frac{t}{100}$
— d'où une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître la nature d'une suite

a) $u_{n+1} - u_n = (5 + 3(n+1)) - (5 + 3n) = 3$. La différence est **constante** : la suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

b) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 4^{n+1}}{2 \times 4^n} = 4$. Le quotient est **constant** : la suite est géométrique de raison 4 et $v_0 = 2$.

c) $w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui dépend de n : elle n'est pas arithmétique. Et $\frac{w_1}{w_0}$ n'existe pas ($w_0 = 0$), tandis que $\frac{w_3}{w_2} = \frac{9}{4}$ et $\frac{w_2}{w_1} = 4$: le quotient n'est pas constant non plus. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Réponse. a) arithmétique ($r = 3$) · b) géométrique ($q = 4$) · c) ni l'une ni l'autre.

Correction de l'exercice 2 - Terme général d'une suite arithmétique

Formule du cours : $u_n = u_0 + nr$.

— $u_{10} = 7 + 10 \times (-2) = 7 - 20 = -13$.

— On résout $7 - 2n = -35$: $-2n = -42$, donc $n = 21$.

— Vérification : $u_{21} = 7 - 42 = -35$. Correct.

— La raison est négative : la suite est strictement décroissante.

Réponse. $u_{10} = -13$ et $u_{21} = -35$.

Correction de l'exercice 3 - Deux termes connus

On utilise la formule $u_n = u_p + (n - p)r$ avec $p = 3$ et $n = 8$:

$$u_8 = u_3 + (8 - 3)r \implies 31 = 11 + 5r$$

- Donc $5r = 20$ et $r = 4$.
- Puis $u_3 = u_0 + 3r$ donne $11 = u_0 + 12$, soit $u_0 = -1$.
- Vérification : $u_8 = -1 + 8 \times 4 = 31$. Correct.

Réponse. $r = 4$ et $u_0 = -1$.

Correction de l'exercice 4 - Terme général d'une suite géométrique

Formule du cours : $v_n = v_0 \times q^n$.

- $v_5 = 250 \times 1,04^5$. Or $1,04^5 \approx 1,216\,653$, donc $v_5 \approx 304,16$.
- $v_{10} = 250 \times 1,04^{10} \approx 250 \times 1,480\,244 \approx 370,06$.
- Interprétation : c'est un capital de 250 € placé à 4 % par an ; il atteint environ 370 € au bout de 10 ans.

Piège. On calcule q^n **avant** de multiplier par v_0 , et on n'arrondit qu'à la fin.

Réponse. $v_5 \approx 304,16$ et $v_{10} \approx 370,06$.

Correction de l'exercice 5 - Évolution en pourcentage

a) Diminuer de 1,5 % revient à multiplier par le coefficient

$$q = 1 - \frac{1,5}{100} = 0,985$$

- La suite est donc **géométrique** de raison 0,985 et de premier terme $p_0 = 12\,000$, d'où $p_n = 12\,000 \times 0,985^n$.

b) $p_4 = 12\,000 \times 0,985^4$.

- $0,985^4 \approx 0,941\,336$, donc $p_4 \approx 11\,296$ habitants.
- Vérification de l'ordre de grandeur : une baisse de 1,5 % par an pendant 4 ans représente un peu moins de 6 %, soit environ 700 habitants de moins. Cohérent.

Réponse. a) $p_n = 12\,000 \times 0,985^n$ · b) $p_4 \approx 11\,296$ habitants.

Correction de l'exercice 6 - Somme des premiers entiers

Formule du cours : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$.
- Pour T , on peut soustraire deux sommes : $T = (1 + \dots + 60) - (1 + \dots + 19)$.
- $1 + \dots + 60 = \frac{60 \times 61}{2} = 1\,830$ et $1 + \dots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$.
- Donc $T = 1\,830 - 190 = 1\,640$.
- Contrôle par l'autre méthode : T compte $60 - 20 + 1 = 41$ termes, de moyenne $\frac{20 + 60}{2} = 40$, donc $T = 41 \times 40 = 1\,640$. Même résultat.

Réponse. $S = 5\,050$ et $T = 1\,640$.

Correction de l'exercice 7 - Somme de termes d'une suite arithmétique

Méthode du cours : une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

- Nombre de termes : de u_0 à u_{20} , il y a 21 termes.
- Dernier terme : $u_{20} = 3 + 20 \times 5 = 103$.
- Somme : $21 \times \frac{3+103}{2} = 21 \times 53 = 1\,113$.
- Contrôle avec la formule des entiers :
 $\sum_{k=0}^{20} (3 + 5k) = 21 \times 3 + 5 \times \frac{20 \times 21}{2} = 63 + 1\,050 = 1\,113$. Cohérent.

Réponse. 1 113.

Correction de l'exercice 8 - Somme de termes d'une suite géométrique

Formule du cours : pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Pour S : $q = 3$ et $n = 10$, donc $S = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = \frac{1 - 177\,147}{-2} = \frac{-177\,146}{-2} = 88\,573$.
- Pour S' : la parenthèse vaut $\frac{1 - 0,5^7}{1 - 0,5} = \frac{1 - 0,007\,812\,5}{0,5} = 1,984\,375$.
- Donc $S' = 5 \times 1,984\,375 = 9,921\,875 \approx 9,922$.
- Remarque : la somme des puissances de 0,5 ne dépasse jamais 2, quel que soit le nombre de termes.

Réponse. $S = 88\,573$ et $S' \approx 9,922$.

Correction de l'exercice 9 - Monotonie d'une suite

- a) Suite arithmétique de raison $r = -0,5 < 0$: elle est strictement **décroissante**.
- b) Suite géométrique de premier terme positif et de raison $q = 1,2 > 1$: elle est strictement **croissante** (croissance exponentielle).
- c) Suite géométrique de premier terme positif et de raison $q = 0,9$ avec $0 < q < 1$: elle est strictement **décroissante**, et ses termes se rapprochent de 0.
- Justification générale pour b) et c) : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$, donc si $q > 1$ chaque terme est plus grand que le précédent (termes positifs), et si $0 < q < 1$ il est plus petit.

Réponse. a) décroissante · b) croissante · c) décroissante.

Correction de l'exercice 10 - Problème de seuil

a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,03 : la suite est géométrique.

$$C_n = 2\,000 \times 1,03^n$$

b) On calcule de proche en proche :

n	10	11	12	13
C_n (€)	2 687,83	2 768,47	2 851,52	2 937,07

- $C_{10} \approx 2\,687,83 < 2\,700$ et $C_{11} \approx 2\,768,47 > 2\,700$.
- C'est donc au bout de 11 **ans** que le capital dépasse 2 700 €.
- c) Algorithme de seuil : on multiplie tant que le seuil n'est pas atteint.

def seuil():

```

c = 2000
n = 0
while c <= 2700:
    c = c * 1.03
    n = n + 1
return n

```

— La boucle *while* s'arrête dès que $c > 2\,700$; la fonction renvoie 11.

Réponse. a) $C_n = 2\,000 \times 1,03^n$ · b) au bout de 11 ans ($\approx 2\,768$ €).

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : amortissement d'un prêt

Les versements forment une suite **arithmétique** de premier terme $a_1 = 150$ et de raison $r = 10$.

a) $a_{12} = a_1 + 11r = 150 + 110 = 260$ €.

b) Somme de 12 termes consécutifs :

$$S_{12} = 12 \times \frac{150 + 260}{2} = 12 \times 205 = 2\,460 \text{ €}$$

c) Pour n mois, le dernier versement vaut $150 + (n - 1) \times 10 = 140 + 10n$, donc

$$S_n = n \times \frac{150 + 140 + 10n}{2} = n \times \frac{290 + 10n}{2} = 5n^2 + 145n$$

— On cherche le plus petit n tel que $5n^2 + 145n > 5\,000$, soit $n^2 + 29n - 1\,000 > 0$.

— Discriminant : $\Delta = 29^2 + 4\,000 = 841 + 4\,000 = 4\,841$, et $\sqrt{4\,841} \approx 69,58$.

— Racine positive : $n = \frac{-29 + 69,58}{2} \approx 20,29$.

— Le trinôme est positif au-delà de cette racine : il faut donc $n \geq 21$.

— Vérification : $S_{20} = 5 \times 400 + 2\,900 = 4\,900 < 5\,000$ et

$$S_{21} = 5 \times 441 + 3\,045 = 2\,205 + 3\,045 = 5\,250 > 5\,000.$$

— Conclusion : le total dépasse 5 000 € au bout de 21 **mois**.

Réponse. a) 260 € · b) 2 460 € · c) 21 mois ($S_{21} = 5\,250$ €).