

Plaque 2 - Suites arithmétiques : raison, terme général et sommes

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. (u_n) est **arithmétique** de raison r si

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout } n$$

De façon équivalente, $u_{n+1} - u_n = r$ est **constante**.

Terme général.

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{ou, à partir du rang } p: \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

Sens de variation. $r > 0$: croissante · $r < 0$: décroissante · $r = 0$: constante.

Somme des premiers entiers.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des termes consécutifs.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

En mots : **nombre de termes** × **moyenne du premier et du dernier**.

Lecture graphique. Les points $(n; u_n)$ sont **alignés** — la suite arithmétique est le pendant discret de la fonction affine.

Modélisation. Une suite arithmétique modélise une évolution par **ajout constant** : salaire augmenté de 50 € par an, distance parcourue à vitesse constante, remboursement par mensualités fixes.

Reconnaître le piège. Une augmentation de 5 % par an n'est **pas** arithmétique mais **géométrique** — ajout constant $\neq$ pourcentage constant.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une suite arithmétique

- **a) Oui.** Les différences valent 5 à chaque fois : $7 - 2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$, donc $r = 5$ ✓
- **b) Non.** Les différences sont 1, 2, 4 — non constantes. C'est une suite **géométrique** de raison 2.
- **c) Oui.** $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) = 3$, donc $r = 3$ ✓
- **Contrôle** : $u_0 = -5$, $u_1 = -2$, $u_2 = 1$ — différences constantes égales à 3 ✓
- **d) Non.** $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui **dépend de** n ✓
- **Contrôle** : 0, 1, 4, 9 — différences 1, 3, 5, croissantes.
- **À retenir** : une suite est arithmétique si et seulement si son terme général est de la forme **affine** $an + b$; alors $r = a$.

Réponse. a) oui, $r = 5$ · b) non (géométrique) · c) oui, $r = 3$ · d) non.

Correction de l'exercice 2 - Terme général

— **Terme général** : $u_n = 7 - 3n$.

— **Valeur** :

$$u_{10} = 7 - 30 = -23$$

— **Premier terme négatif** : on résout $7 - 3n < 0$, soit $n > \frac{7}{3} \approx 2,333$.

— **Conclusion** : $n = 3$, avec $u_3 = 7 - 9 = -2$.

— **Contrôles** : $u_2 = 1 > 0$ ✓ et $u_3 = -2 < 0$ ✓

— **Liste des premiers termes** : 7 ; 4 ; 1 ; -2 ; -5 ; ... — décroissance de 3 en 3 ✓

— **Sens de variation** : $r = -3 < 0$, la suite est **strictement décroissante** ✓

— **Limite** : $u_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ — toute suite arithmétique de raison négative diverge vers $-\infty$.

Réponse. $u_{10} = -23$; le premier terme négatif est $u_3 = -2$.

Correction de l'exercice 3 - Deux termes connus

— **Raison** : entre les rangs 3 et 8, on ajoute 5 fois r :

$$u_8 = u_3 + 5r \quad \Rightarrow \quad 31 = 11 + 5r \quad \Rightarrow \quad r = 4$$

— **Premier terme** : $u_3 = u_0 + 3r$, donc $11 = u_0 + 12$ et

$$u_0 = -1$$

— **Terme général** : $u_n = -1 + 4n$.

— **Contrôles** : $u_3 = -1 + 12 = 11$ ✓ et $u_8 = -1 + 32 = 31$ ✓

— **Valeur demandée** :

$$u_{20} = -1 + 80 = 79$$

— **Méthode générale** : $r = \frac{u_q - u_p}{q - p} = \frac{31 - 11}{8 - 3} = \frac{20}{5} = 4$ ✓

— **Interprétation** : c'est exactement le **taux d'accroissement** entre deux points de la droite, ce qui confirme le lien avec les fonctions affines.

Réponse. $r = 4$, $u_0 = -1$ et $u_{20} = 79$.

Correction de l'exercice 4 - Somme des premiers entiers

— **Première somme** :

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

— **Seconde somme** : il y a $150 - 50 + 1 = 101$ termes, de premier terme 50 et de dernier 150.

$$101 \times \frac{50 + 150}{2} = 101 \times 100 = 10\,100$$

— **Contrôle par différence** : $\frac{150 \times 151}{2} - \frac{49 \times 50}{2} = 11\,325 - 1225 = 10\,100$ ✓

— **Astuce historique** : Gauss enfant aurait calculé $1 + \dots + 100$ en appariant $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, ... soit 50 paires de 101, donc 5050 ✓

— **Vigilance sur le nombre de termes** : de 50 à 150, il y a 101 termes et non 100 — l'erreur du « +1 » oublié est la plus fréquente.

— **Contrôle grossier** : la moyenne des termes est 100 et il y en a environ 100, donc la somme doit valoir environ 10 000 ✓

Réponse. 5050 et 10 100.

Correction de l'exercice 5 - Somme de termes consécutifs

— **Dernier terme** : $u_{20} = 5 + 60 = 65$.

— **Nombre de termes** : 21 (de u_0 à u_{20}).

— **Somme** :

$$S = 21 \times \frac{5+65}{2} = 21 \times 35 = 735$$

— **Contrôle par décomposition** :

$$S = \sum_{k=0}^{20} (5 + 3k) = 21 \times 5 + 3 \times \frac{20 \times 21}{2} = 105 + 630 = 735 \checkmark$$

— **Contrôle grossier** : la moyenne des termes est 35 et il y en a 21, donc $S \approx 735 \checkmark$

— **Somme à partir de u_1** : $735 - 5 = 730$.

— **Piège du nombre de termes** : de u_0 à u_{20} il y a 21 termes ; c'est l'erreur classique de compter 20.

— **Somme de u_5 à u_{15}** : 11 termes, de $u_5 = 20$ à $u_{15} = 50$, soit $11 \times 35 = 385$.

Réponse. $S = 735$.

Correction de l'exercice 6 - Salaire et progression

— **Modèle** : suite arithmétique avec $u_1 = 24\,000$ et $r = 800$.

— **Terme général** : $u_n = 24\,000 + (n - 1) \times 800$.

— **Dixième année** :

$$u_{10} = 24\,000 + 9 \times 800 = 24\,000 + 7200 = 31\,200 \text{ €}$$

— **Total sur 10 ans** :

$$S = 10 \times \frac{24\,000 + 31\,200}{2} = 10 \times 27\,600 = 276\,000 \text{ €}$$

— **Contrôle** : le salaire moyen est 27 600 € sur 10 ans $\checkmark$

— **Contrôle par décomposition** :

$$10 \times 24\,000 + 800 \times (0 + 1 + \dots + 9) = 240\,000 + 800 \times 45 = 240\,000 + 36\,000 = 276\,000 \checkmark$$

— **Comparaison avec une hausse de 3 % par an** : le salaire atteindrait

$24\,000 \times 1,03^9 \approx 31\,315 \text{ €}$ — très proche ici, mais l'écart se creuserait fortement sur une carrière plus longue.

— **Sur 30 ans** : arithmétique $24\,000 + 29 \times 800 = 47\,200 \text{ €}$ contre géométrique

$$24\,000 \times 1,03^{29} \approx 56\,558 \text{ €} \checkmark$$

Réponse. 31 200 € la 10^e année ; 276 000 € au total.

Correction de l'exercice 7 - Trouver le rang

— **Terme général** : $u_n = 4 + 7n$.

— **Inéquation** : $4 + 7n > 500$, soit $7n > 496$ et

$$n > \frac{496}{7} \approx 70,857$$

— **Conclusion** : $n = 71$.

— **Contrôles** : $u_{70} = 4 + 490 = 494 \leq 500 \checkmark$ et $u_{71} = 4 + 497 = 501 > 500 \checkmark$

— **Méthode** : une suite arithmétique croissante dépasse **tout** seuil, en un rang qui se calcule directement (pas besoin de logarithme, contrairement au cas géométrique).

- **Attention à l'inégalité stricte** : si l'énoncé demandait « atteint ou dépasse 500 », la réponse serait la même ici, car $u_n = 500$ n'a pas de solution entière ($496/7$ n'est pas entier).
- **Somme jusqu'à ce rang** : $72 \times \frac{4+501}{2} = 72 \times 252,5 = 18\,180$.

Réponse. $n = 71$ (avec $u_{71} = 501$).

Correction de l'exercice 8 - Suite définie par récurrence

- **Différence** : $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$, qui **dépend de n** — la suite n'est **pas** arithmétique ✓
- **Calcul pas à pas** :
- $u_1 = 2 + 1 = 3$;
- $u_2 = 3 + 3 = 6$;
- $u_3 = 6 + 5 = 11$;
- $u_4 = 11 + 7 = 18$;
- $u_5 = 18 + 9 = 27$.
- **Réponse** : $u_5 = 27$.
- **Forme explicite** : les accroissements 1, 3, 5, ... sont les entiers impairs, de somme n^2 , donc

$$u_n = 2 + n^2$$

- **Contrôles** : $u_5 = 2 + 25 = 27$ ✓ ; $u_3 = 2 + 9 = 11$ ✓
- **Remarque** : la **suite des différences** ($2n + 1$) est arithmétique de raison 2 — on dit que (u_n) est « arithmétique d'ordre 2 ».
- **Lecture graphique** : les points ne sont pas alignés mais suivent une **parabole** ✓

Réponse. Non arithmétique ; $u_5 = 27$ (et $u_n = n^2 + 2$).

Correction de l'exercice 9 - Remboursement par mensualités

- **Modèle** : suite arithmétique de premier terme $C_0 = 12\,000$ et de raison -250 .
 - **Terme général** :
- $$C_n = 12\,000 - 250n$$
- **Solde** : $C_n = 0$ donne $n = \frac{12\,000}{250} = 48$ mois.
 - **Conclusion** : le prêt est soldé au bout de **48 mois**, soit 4 ans.
 - **Contrôles** : $C_{24} = 12\,000 - 6000 = 6000$ € — la moitié après la moitié du temps, cohérent avec une évolution **linéaire** ✓
 - **Total versé** : $48 \times 250 = 12\,000$ € — exactement le capital, car ce modèle **ignore les intérêts**.
 - **Avec intérêts** (par exemple 0,3 % par mois), la suite deviendrait $C_{n+1} = 1,003C_n - 250$: ni arithmétique ni géométrique, mais **arithmético-géométrique**.
 - **Ordre de grandeur des intérêts** : le prêt durerait alors environ 52 mois, soit 13 000 € versés au total.

Réponse. $C_n = 12\,000 - 250n$; soldé après 48 mois.

Correction de l'exercice 10 - Somme et inconnue

- **Dernier terme** : $u_9 = u_0 + 18$.
- **Somme** :

$$S = 10 \times \frac{u_0 + u_0 + 18}{2} = 10 \times (u_0 + 9) = 10u_0 + 90$$

— **Équation** : $10u_0 + 90 = 120$, donc

$$u_0 = 3$$

— **Vérification** : les termes sont 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21.

— **Somme** : $10 \times \frac{3+21}{2} = 10 \times 12 = 120$ ✓

— **Contrôle direct** : $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 120$ ✓

— **Méthode alternative** : la somme vaut 10 fois la **moyenne**, qui est donc 12 ; cette moyenne est celle de u_0 et u_9 , ou encore de u_4 et u_5 (11 et 13) ✓

— **Généralisation** : pour un nombre **pair** de termes, la moyenne est celle des deux termes centraux.

Réponse. $u_0 = 3$.

Correction de l'exercice 11 - Suite arithmétique et moyenne

— **Expression des voisins** : $u_{n-1} = u_n - r$ et $u_{n+1} = u_n + r$.

— **Moyenne** :

$$\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{(u_n - r) + (u_n + r)}{2} = \frac{2u_n}{2} = u_n$$

— **Conclusion** : l'égalité est démontrée pour tout $n \geq 1$ ✓

— **Vérification numérique** : pour 3 ; 7 ; 11, on a $\frac{3+11}{2} = 7$ ✓

— **Réciproque** : si $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ pour tout n , alors $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$ — la différence est constante, donc la suite **est** arithmétique ✓

— **Caractérisation complète** : « chaque terme est la moyenne arithmétique de ses voisins » équivaut à « la suite est arithmétique ».

— **Application pratique** : cette propriété permet de **compléter** un terme manquant. Si $u_5 = 12$ et $u_7 = 20$, alors $u_6 = 16$.

— **Analogie géométrique** : dans une suite géométrique à termes positifs, chaque terme est la **moyenne géométrique** $\sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}$ de ses voisins.

Réponse. $u_{n \pm 1} = u_n \mp r$ donne une moyenne égale à u_n ; la réciproque est vraie.

Correction de l'exercice 12 - Empilement de briques

— **Modèle** : suite arithmétique de raison -1 , de 40 à 1.

— **Nombre de rangs** : 40.

— **Somme** :

$$S = 40 \times \frac{40+1}{2} = 40 \times 20,5 = 820$$

— **Contrôle par la formule** : $\frac{40 \times 41}{2} = 820$ ✓

— **Contrôle grossier** : 40 rangs de 20,5 briques en moyenne ✓

— **Variante à 50 rangs** : $\frac{50 \times 51}{2} = 1275$ briques.

— **Si l'on partait de 2 briques au sommet** (rangs de 2 à 40) : $820 - 1 = 819$ briques.

— **Question inverse** : avec 500 briques, jusqu'où monter ? On résout $\frac{n(n+1)}{2} \leq 500$,
soit $n^2 + n - 1000 \leq 0$ et $n \leq \frac{-1 + \sqrt{4001}}{2} \approx 31,13$ — donc 31 rangs, utilisant 496

briques ✓

Réponse. 820 briques.

Correction de l'exercice 13 - Comparaison de deux suites

— **Inéquation** : $20 + 12n > 100 + 5n$, soit $7n > 80$ et

$$n > \frac{80}{7} \approx 11,429$$

— **Conclusion** : $n \geq 12$.

— **Contrôles** : $u_{11} = 155$ et $v_{11} = 152$ — encore $v_{11} < u_{11}$ ✓

— $u_{12} = 160$ et $v_{12} = 164$ — cette fois $v_{12} > u_{12}$ ✓

— **Interprétation** : (v_n) part de plus bas (20 contre 100) mais croît plus vite (12 contre 5) — elle finit nécessairement par dépasser.

— **Point de croisement exact** : les droites se coupent en $n = \frac{80}{7} \approx 11,43$, entre les rangs 11 et 12 ✓

— **Écart au rang 20** : $v_{20} - u_{20} = 260 - 200 = 60$ ✓

— **Règle générale** : la suite de **plus grande raison** finit toujours par l'emporter, quel que soit l'écart initial.

Réponse. $n \geq 12$ (croisement en $\frac{80}{7} \approx 11,43$).

Correction de l'exercice 14 - Somme d'entiers impairs

— **Nombre de termes** : les impairs de 1 à 99 sont au nombre de 50 (le k -ième est $2k - 1$, et $2 \times 50 - 1 = 99$).

— **Somme** :

$$S = 50 \times \frac{1 + 99}{2} = 50 \times 50 = 2500$$

— **Conjecture** : $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

— **Contrôle ici** : $n = 50$ donne $2500 = 50^2$ ✓

— **Contrôles sur de petits cas** : $1 = 1^2$ ✓ ; $1 + 3 = 4 = 2^2$ ✓ ; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ ✓ ; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ✓

— **Démonstration** : $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$ ✓

— **Interprétation géométrique** : on complète un carré de côté n en ajoutant des « équerres » de $2n - 1$ cases — c'est la preuve visuelle classique.

— **Somme des pairs** : $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$, et l'on retrouve bien

$$n^2 + n(n + 1) = \frac{2n(2n + 1)}{2}, \text{ la somme de tous les entiers jusqu'à } 2n \text{ ✓}$$

Réponse. $2500 = 50^2$; en général $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Correction de l'exercice 15 - Modèle de remplissage

— **Modèles** : $u_n = 150 + 12n$ et $v_n = 600 - 18n$ (en litres après n heures).

— **Égalité** : $150 + 12n = 600 - 18n$, soit $30n = 450$ et

$$n = 15 \text{ heures}$$

— **Quantité commune** : $u_{15} = 150 + 180 = 330$ L.

— **Contrôle** : $v_{15} = 600 - 270 = 330$ L ✓

— **Contrôle avant/après** : à $n = 10$, 270 L contre 420 L ; à $n = 20$, 390 L contre 240 L — le croisement est bien entre les deux ✓

- **Vidange complète du second** : $600 - 18n = 0$ donne $n = \frac{600}{18} \approx 33,33$ heures — le modèle cesse d'être valable au-delà.
- **Somme des deux réservoirs** : $750 - 6n$, qui **décroît** de 6 L par heure — le système perd du liquide, le remplissage ne compensant pas la vidange.
- **Cohérence** : à $n = 15$, la somme vaut $750 - 90 = 660 = 2 \times 330$ ✓

Réponse. Après 15 heures, avec 330 L chacun.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : gradins d'un stade

a) **Dernier rang** — suite arithmétique avec $u_1 = 30$ et $r = 4$:

$$u_{25} = 30 + 24 \times 4 = 30 + 96 = 126 \text{ places}$$

b) **Total** :

$$S = 25 \times \frac{30 + 126}{2} = 25 \times 78 = 1950 \text{ places}$$

— **Contrôle par décomposition** :

$$25 \times 30 + 4 \times (0 + 1 + \dots + 24) = 750 + 4 \times 300 = 750 + 1200 = 1950 \quad \checkmark$$

c) **Seuil de 1000 places.** La somme des n premiers rangs vaut

$$S_n = n \times \frac{30 + 30 + 4(n-1)}{2} = n(28 + 2n) = 2n^2 + 28n$$

— **Contrôle pour $n = 25$** : $2 \times 625 + 700 = 1250 + 700 = 1950$ ✓

— **Inéquation** : $2n^2 + 28n \geq 1000$, soit $n^2 + 14n - 500 \geq 0$.

— **Discriminant** : $196 + 2000 = 2196$, donc $\sqrt{2196} \approx 46,861$ et la racine positive est $\frac{-14 + 46,861}{2} \approx 16,43$.

— **Conclusion** : $n = 17$ rangs.

— **Vérifications** : $S_{16} = 2 \times 256 + 448 = 512 + 448 = 960 < 1000$ ✓ et

$$S_{17} = 578 + 476 = 1054 \geq 1000 \quad \checkmark$$

— **Lecture** : les deux tiers des rangs (17 sur 25) suffisent à loger un peu plus de la moitié des spectateurs (1054 sur 1950) — les derniers rangs, plus larges, pèsent lourd ✓

Réponse. a) 126 places · b) 1950 places · c) 17 rangs ($S_{17} = 1054$).