

Plaquette 3 - Suites géométriques : raison, croissance et sommes

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. (u_n) est **géométrique** de raison q si

$$u_{n+1} = q u_n \quad \text{pour tout } n$$

De façon équivalente, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ est **constant** (pour $u_n \neq 0$).

Terme général.

$$u_n = u_0 q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_p q^{n-p}$$

Sens de variation (pour $u_0 > 0$) : $q > 1$ croissante · $0 < q < 1$ décroissante · $q = 1$ constante · $q < 0$ **alternée**.

Somme des termes consécutifs (pour $q \neq 1$) :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Limite. Pour $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$; pour $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$.

Pourcentages. Une évolution de $t\%$ par période correspond à

$$q = 1 + \frac{t}{100}$$

— $+5\% \rightarrow q = 1,05$ · $-20\% \rightarrow q = 0,8$ · **doubler** $\rightarrow q = 2$.

— **Évolutions successives** : les coefficients se **multiplient**, jamais les pourcentages ne s'additionnent.

Seuils. Pour résoudre $q^n < s$ avec $0 < q < 1$:

$$n > \frac{\ln s}{\ln q} \quad (\text{le sens s'inverse car } \ln q < 0)$$

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une suite géométrique

- **a) Oui.** Les quotients valent $2 : \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2$, donc $q = 2$ ✓
- **b) Non.** Les quotients $\frac{8}{5} = 1,6$ et $\frac{11}{8} = 1,375$ diffèrent. C'est une suite **arithmétique** de raison 3.
- **c) Oui.** $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n} = 3$, donc $q = 3$ ✓
- **d) Non.** $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 9$ — les quotients 1,5 ; 1,667 ; 1,8 ne sont pas constants ✓
- **Contrôle du d) :** $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1}$, qui **tend** vers 2 sans jamais l'atteindre.
- **À retenir** : une suite est géométrique si et seulement si son terme général est de la forme Aq^n — le « +1 » du d) suffit à briser la structure.

Réponse. a) oui, $q = 2$ · b) non (arithmétique) · c) oui, $q = 3$ · d) non.

Correction de l'exercice 2 - Terme général

— **Terme général** : $u_n = 5 \times 1,2^n$.

— **Valeur** :

$$u_{10} = 5 \times 1,2^{10} \approx 5 \times 6,1917 \approx 30,959$$

— **Seuil** : $5 \times 1,2^n > 50$ équivaut à $1,2^n > 10$, soit

$$n > \frac{\ln 10}{\ln 1,2} \approx \frac{2,3026}{0,18232} \approx 12,629$$

— **Conclusion** : $n = 13$.

— **Vérifications** : $u_{12} = 5 \times 1,2^{12} \approx 44,581 \leq 50$ ✓ et $u_{13} \approx 53,497 > 50$ ✓

— **Croissance** : $q = 1,2 > 1$, la suite est **strictement croissante** et tend vers $+\infty$ ✓

— **Temps de doublement** : $1,2^n = 2$ donne $n \approx 3,80$, soit environ 4 rangs pour doubler
— utile comme repère mental.

— **Contrôle** : $u_4 = 5 \times 2,0736 \approx 10,368$, un peu plus du double de 5 ✓

Réponse. $u_{10} \approx 30,96$; premier rang $n = 13$.

Correction de l'exercice 3 - Deux termes connus

— **Relation** : $u_5 = u_2 q^3$, donc $96 = 12q^3$ et $q^3 = 8$.

— **Raison** :

$$q = 2$$

— **Premier terme** : $u_2 = u_0 q^2$, donc $12 = 4u_0$ et

$$u_0 = 3$$

— **Terme général** : $u_n = 3 \times 2^n$.

— **Contrôles** : $u_2 = 12$ ✓ et $u_5 = 3 \times 32 = 96$ ✓

— **Valeur demandée** :

$$u_8 = 3 \times 256 = 768$$

— **Contrôle par la relation directe** : $u_8 = u_5 \times q^3 = 96 \times 8 = 768$ ✓

— **Méthode générale** : $q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$, d'où $q = \left(\frac{u_n}{u_p}\right)^{\frac{1}{n-p}}$ — ici $8^{1/3} = 2$ ✓

— **Attention** : si l'énoncé n'imposait pas « termes positifs », $q^3 = 8$ n'aurait toujours qu'une solution réelle ; mais avec $q^2 = 4$ on aurait eu **deux** possibilités, 2 et -2.

Réponse. $q = 2$, $u_0 = 3$ et $u_8 = 768$.

Correction de l'exercice 4 - Évolution en pourcentage

— **Modèle** : $u_n = 80\,000 \times 1,015^n$.

— **Dans 20 ans** :

$$u_{20} = 80\,000 \times 1,015^{20} \approx 80\,000 \times 1,34686 \approx 107\,749$$

— **Seuil** : $1,015^n > 1,25$, soit

$$n > \frac{\ln 1,25}{\ln 1,015} \approx \frac{0,22314}{0,014889} \approx 14,987$$

— **Conclusion** : à partir de la 15^e année.

— **Vérifications** : $u_{14} = 80\,000 \times 1,015^{14} \approx 98\,540 \leq 100\,000$ ✓ et
 $u_{15} \approx 100\,018 > 100\,000$ ✓

- **Piège du pourcentage cumulé** : 20 ans à 1,5 % ne font **pas** +30 % mais +34,7 % — les intérêts composés ajoutent 4,7 points.
- **Temps de doublement** : $\frac{\ln 2}{\ln 1,015} \approx 46,56$ ans — à comparer à la règle mentale « $\frac{70}{1,5} \approx 47$ ans » ✓
- **Taux annuel moyen sur 20 ans** : $1,34686^{1/20} = 1,015$ ✓ — par construction.

Réponse. $\approx 107\,749$ habitants dans 20 ans ; dépassement de 100 000 la 15^e année.

Correction de l'exercice 5 - Suite décroissante

- **Modèle** : $u_n = 25\,000 \times 0,88^n$.
- **Au bout de 8 ans** :

$$u_8 = 25\,000 \times 0,88^8 \approx 25\,000 \times 0,35963 \approx 8990,7 \text{ €}$$
- **Seuil** : $0,88^n < 0,2$, soit (avec $\ln 0,88 < 0$, sens **inversé**)

$$n > \frac{\ln 0,2}{\ln 0,88} \approx \frac{-1,6094}{-0,12783} \approx 12,590$$
- **Conclusion** : au bout de 13 ans.
- **Vérifications** : $u_{12} = 25\,000 \times 0,88^{12} \approx 5391,8 \geq 5000$ ✓ et $u_{13} \approx 4744,8 < 5000$ ✓
- **Demi-vie** : $\frac{\ln 0,5}{\ln 0,88} \approx 5,42$ ans — la machine perd la moitié de sa valeur en 5 ans et demi.
- **Contrôle** : $u_5 = 25\,000 \times 0,88^5 \approx 13\,193 \text{ €}$ et $u_6 \approx 11\,610 \text{ €}$ — le passage sous 12 500 € a bien lieu entre 5 et 6 ans ✓
- **Piège** : perdre 12 % pendant 8 ans ne fait pas -96 % mais -64 % — un coefficient multiplicatif ne s'épuise jamais complètement.

Réponse. $\approx 8991 \text{ €}$ au bout de 8 ans ; moins de 5000 € à partir de 13 ans.

Correction de l'exercice 6 - Somme géométrique

- **Première somme** : 11 termes, raison 2.

$$S = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$$
- **Contrôle** : $2^{11} - 1 = 2047$ ✓ — la somme des puissances de 2 jusqu'à 2^n vaut toujours $2^{n+1} - 1$.
- **Seconde somme** : 10 termes, premier terme 3, raison 2.

$$S' = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times 1023 = 3069$$
- **Contrôle** : $3 \times (2^{10} - 1) = 3 \times 1023 = 3069$ ✓
- **Vérification partielle** : $3 + 6 + 12 + 24 = 45 = 3 \times 15 = 3 \times (2^4 - 1)$ ✓
- **Ordre de grandeur** : une somme géométrique de raison 2 est toujours **un peu moins** que le double du dernier terme. Ici $2 \times 1024 = 2048$ contre 2047 ✓
- **Piège du nombre de termes** : de 2^0 à 2^{10} , il y a 11 termes, d'où l'exposant 11 dans la formule ✓

Réponse. 2047 et 3069.

Correction de l'exercice 7 - Épargne avec versements

- **Analyse** : le premier versement a fructifié 9 ans, le deuxième 8 ans, ..., le dernier 0 an.
- **Capital** :

$$C = 1000(1,03^9 + 1,03^8 + \dots + 1,03^0)$$

- **Somme géométrique** de 10 termes, raison 1,03 :

$$C = 1000 \times \frac{1,03^{10} - 1}{1,03 - 1} = 1000 \times \frac{0,343916}{0,03} \approx 11\,463,9 \text{ €}$$

- **Contrôle** : $1,03^{10} \approx 1,343916$ ✓
- **Comparaison** : 10 versements de 1000 € font 10 000 € ; les intérêts ajoutent 1463,9 €, soit 14,6 % ✓
- **Contrôle par les premiers termes** : $1,03^9 \approx 1,30477$, $1,03^8 \approx 1,26677$, ... — la somme de ces dix coefficients vaut bien environ 11,4639 ✓
- **Avec un versement de plus** (11 ans) : $1000 \times \frac{1,03^{11} - 1}{0,03} \approx 12\,807,8 \text{ €}$ — l'écart 1343,9 € correspond au nouveau versement plus les intérêts de l'année ✓
- **Effet du taux** : à 5 %, le capital atteindrait $1000 \times \frac{1,05^{10} - 1}{0,05} \approx 12\,577,9 \text{ €}$ — deux points de taux valent plus de 1100 € sur dix ans.

Réponse. $\approx 11\,464 \text{ €}$ (dont 1464 € d'intérêts).

Correction de l'exercice 8 - Raison négative

- **Termes** : 4 ; -2 ; 1 ; -0,5 ; 0,25.
 - **Contrôle** : chaque terme est bien -0,5 fois le précédent ✓
 - **Somme** :
- $$S = 4 \times \frac{1 - (-0,5)^5}{1 - (-0,5)} = 4 \times \frac{1 + 0,03125}{1,5} = 4 \times \frac{1,03125}{1,5} = 2,75$$
- **Contrôle direct** : $4 - 2 + 1 - 0,5 + 0,25 = 2,75$ ✓
 - **Comportement** : la suite **alterne** de signe et son amplitude **décroît** — elle tend vers 0.
 - **Somme infinie** : comme $|q| = 0,5 < 1$, la somme de **tous** les termes converge vers

$$\frac{u_0}{1 - q} = \frac{4}{1,5} \approx 2,6667$$

- **Contrôle** : nos 5 premiers termes donnent déjà 2,75, et la suite des sommes partielles oscille autour de 2,6667 en s'en rapprochant ✓
- **Sommes partielles** : 4 ; 2 ; 3 ; 2,5 ; 2,75 ; 2,625 ; ... — l'encadrement se resserre à chaque terme ✓
- **Vigilance** : avec $q < 0$, la suite n'est **ni croissante ni décroissante** — parler de « sens de variation » n'a pas de sens.

Réponse. 4 ; -2 ; 1 ; -0,5 ; 0,25 et $S = 2,75$.

Correction de l'exercice 9 - Baisse puis hausse

- **Coefficients** : 0,8 puis 1,2.
- **Coefficient global** :

$$0,8 \times 1,2 = 0,96$$

- **Évolution globale** : -4% — le prix ne revient **pas** à son niveau initial.
- **Exemple numérique** : $100\text{ €} \rightarrow 80\text{ €} \rightarrow 96\text{ €}$ ✓
- **Explication** : la hausse de 20% s'applique à une base **plus petite** (80 €) que la baisse (100 €).
- **Hausse nécessaire** : il faut un coefficient $\frac{1}{0,8} = 1,25$, soit

$$+25\%$$
- **Contrôle** : $80 \times 1,25 = 100\text{ €}$ ✓
- **Règle générale** : pour annuler une baisse de $t\%$, il faut une hausse de $\frac{100t}{100-t}\%$ — ici

$$\frac{2000}{80} = 25\%$$
 ✓
- **Autres cas utiles** : annuler -50% demande $+100\%$; annuler -10% demande $+11,11\%$.
- **Conséquence en bourse** : une perte de 50% exige un gain de 100% pour être effacée — d'où l'asymétrie bien connue des placements risqués.

Réponse. -4% globalement ; il faudrait $+25\%$ pour revenir au prix initial.

Correction de l'exercice 10 - Comparer arithmétique et géométrie

- **Rang 5** : $u_5 = 2000$ et $v_5 = 1000 \times 1,61051 \approx 1610,5$ — l'**arithmétique** domine.
- **Rang 10** : $u_{10} = 3000$ et $v_{10} = 1000 \times 2,59374 \approx 2593,7$ — encore l'arithmétique.
- **Rang 20** : $u_{20} = 5000$ et $v_{20} = 1000 \times 6,72750 \approx 6727,5$ — cette fois la **géométrie** domine.
- **Rang de croisement** : on résout $1000 + 200n = 1000 \times 1,1^n$ numériquement.
- $n = 15$: 4000 contre $4177,2$ — la géométrie est déjà passée devant.
- $n = 14$: 3800 contre $3797,5$ — quasi-égalité, l'arithmétique tient encore de justesse.
- **Croisement** : entre les rangs 14 et 15 ✓
- **Loi générale** : une croissance **exponentielle** finit **toujours** par dépasser une croissance **linéaire**, quels que soient les coefficients — c'est le théorème des croissances comparées.
- **Au rang 50** : $u_{50} = 11\,000$ contre $v_{50} \approx 117\,391$ — un facteur $10,7$ ✓
- **Leçon financière** : sur le long terme, un taux d'intérêt, même modeste, l'emporte sur un versement fixe.

Réponse. L'arithmétique domine jusqu'au rang 14 ; la géométrie l'emporte ensuite.

Correction de l'exercice 11 - Suite géométrique et logarithme

- **Modèle** : $m_n = m_0 \times 0,97^n$.
- **Condition** : $0,97^n < 0,1$, soit (sens **inversé** car $\ln 0,97 < 0$)

$$n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,97} \approx \frac{-2,3026}{-0,030459} \approx 75,595$$
- **Conclusion** : 76 jours.
- **Vérifications** : $0,97^{75} \approx 0,101831 \geq 0,1$ ✓ et $0,97^{76} \approx 0,098776 < 0,1$ ✓
- **Demi-vie** : $\frac{\ln 0,5}{\ln 0,97} \approx 22,76$ jours.
- **Contrôle de cohérence** : perdre 90% correspond à un peu plus de trois demi-vies ($3 \times 22,76 = 68,3$ jours donnerait $12,5\%$), et 76 jours est bien au-delà ✓

- **Vérification** : $0,97^{68} \approx 0,126031$, proche de $\frac{1}{8} = 0,125$ ✓
- **Règle des 70** : la demi-vie approchée vaut $\frac{70}{3} \approx 23,3$ jours — très proche des 22,76 exacts ✓
- **Piège** : 3 % par jour pendant 33 jours ne fait pas disparaître la substance ; il en reste $0,97^{33} \approx 36,7\%$.

Réponse. 76 jours (demi-vie de 22,76 jours).

Correction de l'exercice 12 - Somme infinie

- **Nature** : suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{1}{3}$.
- **Condition de convergence** : $|q| = \frac{1}{3} < 1$ ✓
- **Formule** :

$$S = \frac{u_0}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5$$
- **Contrôle par les sommes partielles** : 1 ; 1,3333 ; 1,4444 ; 1,4815 ; 1,4938 ; 1,4979 — la convergence vers 1,5 est nette ✓
- **Démonstration** : $S_n = \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$, qui tend vers $\frac{3}{2}$ ✓
- **Reste** : $S - S_n = \frac{1}{2 \times 3^n}$ — il décroît très vite, ce qui explique la convergence rapide.
- **Contrôle** : $S - S_4 = 1,5 - 1,49383 = 0,00617$, et $\frac{1}{2 \times 81} \approx 0,00617$ ✓
- **Astuce de vérification** : $S = 1 + \frac{1}{3}S$ car la somme se reconstruit elle-même — d'où $\frac{2}{3}S = 1$ et $S = \frac{3}{2}$ ✓
- **Divergence** : avec $q = \frac{4}{3} > 1$, la somme serait infinie — la condition $|q| < 1$ est essentielle.

Réponse. $S = \frac{3}{2} = 1,5$.

Correction de l'exercice 13 - Taux annuel équivalent

- **Coefficient global** : $\frac{8000}{5000} = 1,6$.
- **Taux annuel** : on cherche q tel que $q^6 = 1,6$, soit

$$q = 1,6^{1/6} \approx 1,081484$$
- **Taux** : environ 8,15 % par an.
- **Vérification** : $5000 \times 1,081484^6 = 5000 \times 1,6 = 8000$ € ✓
- **Piège de la moyenne arithmétique** : $\frac{60\%}{6} = 10\%$ par an donnerait $5000 \times 1,1^6 \approx 8857,8$ € — nettement trop ✓
- **Contrôle année par année** : $5000 \rightarrow 5406,7 \rightarrow 5846,6 \rightarrow 6322,2 \rightarrow 6836,5 \rightarrow 7392,6 \rightarrow 7994,0$ — l'écart final de 6 € vient des arrondis d'affichage ✓
- **Règle** : un taux moyen se calcule toujours par une **racine**, jamais par une division.
- **Ordre de grandeur** : 1,6 en 6 ans, c'est un doublement en environ $\frac{\ln 2}{\ln 1,081484} \approx 8,85$ ans ✓

Réponse. $q = 1,6^{1/6} \approx 1,0815$, soit environ 8,15 % par an.

Correction de l'exercice 14 - Suite à termes alternés

— **Termes** : 3 ; -6 ; 12 ; -24 ; 48.

— **Somme** :

$$S = 3 \times \frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} = 3 \times \frac{1 + 32}{3} = 33$$

— **Contrôle direct** : $3 - 6 + 12 - 24 + 48 = 33$ ✓

— **Comportement** : les termes **alternent** de signe et leur valeur absolue **croît** sans limite ($|u_n| = 3 \times 2^n$).

— **Divergence** : la suite n'a **pas de limite** — elle oscille avec une amplitude croissante ✓

— **Conséquence** : la somme infinie **n'existe pas**, car $|q| = 2 > 1$.

— **Sommes partielles** : 3 ; -3 ; 9 ; -15 ; 33 ; -63 — elles oscillent aussi, en amplifiant ✓

— **Formule des sommes partielles** : $S_n = 3 \times \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} = 1 - (-2)^{n+1}$.

— **Contrôle** : $S_4 = 1 - (-2)^5 = 1 + 32 = 33$ ✓ et $S_3 = 1 - 16 = -15$ ✓

— **À retenir** : une raison négative de valeur absolue supérieure à 1 donne le comportement le plus « chaotique » possible pour une suite géométrique.

Réponse. 3 ; -6 ; 12 ; -24 ; 48 et $S = 33$; suite divergente oscillante.

Correction de l'exercice 15 - Modèle de propagation

— **Modèle** : $u_n = 2 \times 3^n$.

— **Jour 8** :

$$u_8 = 2 \times 6561 = 13\,122 \text{ personnes}$$

— **Seuil** : $2 \times 3^n \geq 200\,000$, soit $3^n \geq 100\,000$ et

$$n \geq \frac{\ln 100\,000}{\ln 3} \approx \frac{11,5129}{1,09861} \approx 10,479$$

— **Conclusion** : au jour 11.

— **Vérifications** : $u_{10} = 2 \times 59\,049 = 118\,098 < 200\,000$ ✓ et $u_{11} = 2 \times 177\,147 = 354\,294 \geq 200\,000$ ✓

— **Lecture** : 11 jours seulement pour informer une ville entière à partir de 2 personnes — la puissance de la croissance exponentielle.

— **Limite du modèle** : le jour 11, le modèle prédit 354 294 personnes, soit **plus** que la population. Un modèle réaliste doit **saturer** (courbe logistique) ✓

— **Contrôle de l'ordre de grandeur** : $3^{10} \approx 59\,000$ et $3^{11} \approx 177\,000$ — chaque jour multiplie par 3, donc le saut par-dessus 100 000 était inévitable ✓

— **Comparaison** : avec un doublement quotidien, il faudrait $\frac{\ln 100\,000}{\ln 2} \approx 16,6$, soit 17 jours.

Réponse. 13 122 personnes au jour 8 ; ville informée au jour 11.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux offres de placement

a) **Modèles** :

$$A_n = 10\,000 \times 1,04^n \quad (\text{géométrique}) \quad B_n = 10\,000 + 450n \quad (\text{arithmétique})$$

b) Comparaisons.

- 5 **ans** : $A_5 = 10\,000 \times 1,216653 \approx 12\,166,5$ € contre $B_5 = 12\,250$ € — **B** l'emporte.
- 10 **ans** : $A_{10} \approx 14\,802,4$ € contre $B_{10} = 14\,500$ € — **A** l'emporte.
- 20 **ans** : $A_{20} \approx 21\,911,2$ € contre $B_{20} = 19\,000$ € — **A** largement devant.

c) **Année de croisement.** On cherche le plus petit n tel que $1,04^n > 1 + 0,045n$.

- $n = 6$: 1,265319 contre 1,27 — B encore devant (12 653,2 € contre 12 700 €).
- $n = 7$: 1,315932 contre 1,315 — **A passe devant** (13 159,3 € contre 13 150 €).
- **Conclusion** : A dépasse B à partir de la **7^e année**, de très peu (9,3 €).
- **Contrôle** : l'écart se creuse ensuite vite — 302,4 € à 10 ans, 2911,2 € à 20 ans ✓
- **Interprétation** : les 450 € fixes de B correspondent à 4,5 % du capital **initial**, plus que les 4 % de A la première année — mais A calcule ses intérêts sur un capital qui **grossit**, ce qui finit par l'emporter.
- **Sur 30 ans** : $A_{30} \approx 32\,433,9$ € contre $B_{30} = 23\,500$ € — près de 9000 € d'écart ✓
- **Leçon** : les intérêts **composés** battent toujours les intérêts **simples** à long terme, même avec un taux affiché plus faible.

Réponse. b) B gagne à 5 ans, A à 10 et 20 ans · c) A dépasse B dès la 7^e année.