Plaquette 3 – Suites géométriques : raison, croissance et sommes

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. (u_n) est **géométrique** de raison q si

$$u_{n+1} = q\,u_n \qquad \text{pour tout } n$$

De façon équivalente, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ est **constant** (pour $u_n \neq 0$).

Terme général.

$$u_n = u_0\,q^n \qquad \text{ou} \qquad u_n = u_p\,q^{n-p}$$

Sens de variation (pour $u_0 > 0$) : $q > 1$ croissante · $0 < q < 1$ décroissante · $q = 1$ constante · $q < 0$ **alternée**.

Somme des termes consécutifs (pour $q \neq 1$) :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Limite. Pour $|q| < 1$, $q^n \to 0$; pour $q > 1$, $q^n \to +\infty$.

Pourcentages. Une évolution de $t\,\%$ par période correspond à

$$q = 1 + \frac{t}{100}$$

— $+5\,\% \to q = 1{,}05$ · $-20\,\% \to q = 0{,}8$ · **doubler** $\to q = 2$.

— **Évolutions successives** : les coefficients se **multiplient**, jamais les pourcentages ne s'additionnent.

Seuils. Pour résoudre $q^n < s$ avec $0 < q < 1$:

$$n > \frac{\ln s}{\ln q} \qquad \text{(le sens s'inverse car } \ln q < 0\text{)}$$

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une suite géométrique

— **a) Oui.** Les quotients valent 2 : $\dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{24}{12} = 2$, donc $q = 2$ ✓

— **b) Non.** Les quotients $\dfrac{8}{5} = 1{,}6$ et $\dfrac{11}{8} = 1{,}375$ diffèrent. C'est une suite **arithmétique** de raison 3.

— **c) Oui.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n} = 3$, donc $q = 3$ ✓

— **d) Non.** $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 9$ — les quotients 1,5 ; 1,667 ; 1,8 ne sont pas constants ✓

— **Contrôle du d)** : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1}$, qui **tend** vers 2 sans jamais l'atteindre.

— **À retenir** : une suite est géométrique si et seulement si son terme général est de la forme Aq^n — le « +1 » du d) suffit à briser la structure.

Réponse. a) oui, $q = 2$ · b) non (arithmétique) · c) oui, $q = 3$ · d) non.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Terme général

— **Terme général** : $u_n = 5 \times 1{,}2^n$.
— **Valeur** :

$$u_{10} = 5 \times 1{,}2^{10} \approx 5 \times 6{,}1917 \approx 30{,}959$$

— **Seuil** : $5 \times 1{,}2^n > 50$ équivaut à $1{,}2^n > 10$, soit

$$n > \frac{\ln 10}{\ln 1{,}2} \approx \frac{2{,}3026}{0{,}18232} \approx 12{,}629$$

— **Conclusion** : $n = 13$.
— **Vérifications** : $u_{12} = 5 \times 1{,}2^{12} \approx 44{,}581 \leq 50$ ✓ et $u_{13} \approx 53{,}497 > 50$ ✓
— **Croissance** : $q = 1{,}2 > 1$, la suite est **strictement croissante** et tend vers $+\infty$ ✓
— **Temps de doublement** : $1{,}2^n = 2$ donne $n \approx 3{,}80$, soit environ 4 rangs pour doubler — utile comme repère mental.
— **Contrôle** : $u_4 = 5 \times 2{,}0736 \approx 10{,}368$, un peu plus du double de 5 ✓

Réponse. $u_{10} \approx 30{,}96$; premier rang $n = 13$.

Correction de l'exercice 3 – Deux termes connus

— **Relation** : $u_5 = u_2\, q^3$, donc $96 = 12q^3$ et $q^3 = 8$.
— **Raison** :

$$q = 2$$

— **Premier terme** : $u_2 = u_0 q^2$, donc $12 = 4u_0$ et

$$u_0 = 3$$

— **Terme général** : $u_n = 3 \times 2^n$.
— **Contrôles** : $u_2 = 12$ ✓ et $u_5 = 3 \times 32 = 96$ ✓
— **Valeur demandée** :

$$u_8 = 3 \times 256 = 768$$

— **Contrôle par la relation directe** : $u_8 = u_5 \times q^3 = 96 \times 8 = 768$ ✓
— **Méthode générale** : $q^{n-p} = \dfrac{u_n}{u_p}$, d'où $q = \left(\dfrac{u_n}{u_p}\right)^{\frac{1}{n-p}}$ — ici $8^{1/3} = 2$ ✓
— **Attention** : si l'énoncé n'imposait pas « termes positifs », $q^3 = 8$ n'aurait toujours qu'une solution réelle ; mais avec $q^2 = 4$ on aurait eu **deux** possibilités, 2 et -2.

Réponse. $q = 2$, $u_0 = 3$ et $u_8 = 768$.

Correction de l'exercice 4 – Évolution en pourcentage

— **Modèle** : $u_n = 80\,000 \times 1{,}015^n$.
— **Dans** 20 **ans** :

$$u_{20} = 80\,000 \times 1{,}015^{20} \approx 80\,000 \times 1{,}34686 \approx 107\,749$$

— **Seuil** : $1{,}015^n > 1{,}25$, soit

$$n > \frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}015} \approx \frac{0{,}22314}{0{,}014889} \approx 14{,}987$$

— **Conclusion** : à partir de la 15^{e} année.
— **Vérifications** : $u_{14} = 80\,000 \times 1{,}015^{14} \approx 98\,540 \leq 100\,000$ ✓ et $u_{15} \approx 100\,018 > 100\,000$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Piège du pourcentage cumulé** : 20 ans à 1,5 % ne font **pas** +30 % mais +34,7 % — les intérêts composés ajoutent 4,7 points.
— **Temps de doublement** : $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}015} \approx 46{,}56$ ans — à comparer à la règle mentale « $\dfrac{70}{1{,}5} \approx 47$ ans » ✓
— **Taux annuel moyen sur** 20 **ans** : $1{,}34686^{1/20} \approx 1{,}015$ ✓ — par construction.

Réponse. ≈ 107 749 habitants dans 20 ans ; dépassement de 100 000 la 15^{e} année.

Correction de l’exercice 5 – Suite décroissante

— **Modèle** : $u_n = 25\,000 \times 0{,}88^n$.
— **Au bout de** 8 **ans** :

$$u_8 = 25\,000 \times 0{,}88^8 \approx 25\,000 \times 0{,}35963 \approx 8990{,}7 \text{ €}$$

— **Seuil** : $0{,}88^n < 0{,}2$, soit (avec $\ln 0{,}88 < 0$, sens **inversé**)

$$n > \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}88} \approx \frac{-1{,}6094}{-0{,}12783} \approx 12{,}590$$

— **Conclusion** : au bout de 13 ans.
— **Vérifications** : $u_{12} = 25\,000 \times 0{,}88^{12} \approx 5391{,}8 \geq 5000$ ✓ et $u_{13} \approx 4744{,}8 < 5000$ ✓
— **Demi-vie** : $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}88} \approx 5{,}42$ ans — la machine perd la moitié de sa valeur en 5 ans et demi.
— **Contrôle** : $u_5 = 25\,000 \times 0{,}88^5 \approx 13\,193$ € et $u_6 \approx 11\,610$ € — le passage sous 12 500 € a bien lieu entre 5 et 6 ans ✓
— **Piège** : perdre 12 % pendant 8 ans ne fait pas −96 % mais −64 % — un coefficient multiplicatif ne s’épuise jamais complètement.

Réponse. ≈ 8991 € au bout de 8 ans ; moins de 5000 € à partir de 13 ans.

Correction de l’exercice 6 – Somme géométrique

— **Première somme** : 11 termes, raison 2.

$$S = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$$

— **Contrôle** : $2^{11} - 1 = 2047$ ✓ — la somme des puissances de 2 jusqu’à 2^n vaut toujours $2^{n+1} - 1$.
— **Seconde somme** : 10 termes, premier terme 3, raison 2.

$$S' = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3 \times 1023 = 3069$$

— **Contrôle** : $3 \times \left(2^{10} - 1\right) = 3 \times 1023 = 3069$ ✓
— **Vérification partielle** : $3 + 6 + 12 + 24 = 45 = 3 \times 15 = 3 \times \left(2^4 - 1\right)$ ✓
— **Ordre de grandeur** : une somme géométrique de raison 2 est toujours **un peu moins** que le double du dernier terme. Ici $2 \times 1024 = 2048$ contre 2047 ✓
— **Piège du nombre de termes** : de 2^0 à 2^{10}, il y a 11 termes, d’où l’exposant 11 dans la formule ✓

Réponse. 2047 et 3069.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Épargne avec versements

— **Analyse** : le premier versement a fructifié 9 ans, le deuxième 8 ans, …, le dernier 0 an.

— **Capital** :

$$C = 1000\left(1{,}03^{9} + 1{,}03^{8} + \cdots + 1{,}03^{0}\right)$$

— **Somme géométrique** de 10 termes, raison 1,03 :

$$C = 1000 \times \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 - 1} = 1000 \times \frac{0{,}343916}{0{,}03} \approx 11\,463{,}9\ €$$

— **Contrôle** : $1{,}03^{10} \approx 1{,}343916$ ✓

— **Comparaison** : 10 versements de 1000 € font 10 000 € ; les intérêts ajoutent 1463,9 €, soit 14,6 % ✓

— **Contrôle par les premiers termes** : $1{,}03^{9} \approx 1{,}30477$, $1{,}03^{8} \approx 1{,}26677$, … — la somme de ces dix coefficients vaut bien environ 11,4639 ✓

— **Avec un versement de plus** (11 ans) : $1000 \times \dfrac{1{,}03^{11} - 1}{0{,}03} \approx 12\,807{,}8$ € — l’écart 1343,9 € correspond au nouveau versement plus les intérêts de l’année ✓

— **Effet du taux** : à 5 %, le capital atteindrait $1000 \times \dfrac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} \approx 12\,577{,}9$ € — deux points de taux valent plus de 1100 € sur dix ans.

Réponse. ≈ 11 464 € (dont 1464 € d’intérêts).

Correction de l’exercice 8 – Raison négative

— **Termes** : 4 ; −2 ; 1 ; −0,5 ; 0,25.

— **Contrôle** : chaque terme est bien −0,5 fois le précédent ✓

— **Somme** :

$$S = 4 \times \frac{1 - (-0{,}5)^{5}}{1 - (-0{,}5)} = 4 \times \frac{1 + 0{,}03125}{1{,}5} = 4 \times \frac{1{,}03125}{1{,}5} = 2{,}75$$

— **Contrôle direct** : $4 - 2 + 1 - 0{,}5 + 0{,}25 = 2{,}75$ ✓

— **Comportement** : la suite **alterne** de signe et son amplitude **décroît** — elle tend vers 0.

— **Somme infinie** : comme $|q| = 0{,}5 < 1$, la somme de **tous** les termes converge vers

$$\frac{u_0}{1 - q} = \frac{4}{1{,}5} \approx 2{,}6667$$

— **Contrôle** : nos 5 premiers termes donnent déjà 2,75, et la suite des sommes partielles oscille autour de 2,6667 en s’en rapprochant ✓

— **Sommes partielles** : 4 ; 2 ; 3 ; 2,5 ; 2,75 ; 2,625 ; … — l’encadrement se resserre à chaque terme ✓

— **Vigilance** : avec $q < 0$, la suite n’est **ni croissante ni décroissante** — parler de « sens de variation » n’a pas de sens.

Réponse. 4 ; −2 ; 1 ; −0,5 ; 0,25 et $S = 2{,}75$.

Correction de l’exercice 9 – Baisse puis hausse

— **Coefficients** : 0,8 puis 1,2.

— **Coefficient global** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96$$

— **Évolution globale** : $-4\,\%$ — le prix ne revient **pas** à son niveau initial.
— **Exemple numérique** : 100 € → 80 € → 96 € ✓
— **Explication** : la hausse de 20 % s'applique à une base **plus petite** (80 €) que la baisse (100 €).
— **Hausse nécessaire** : il faut un coefficient $\dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$, soit

$$+25\,\%$$

— **Contrôle** : $80 \times 1{,}25 = 100$ € ✓
— **Règle générale** : pour annuler une baisse de $t\,\%$, il faut une hausse de $\dfrac{100t}{100-t}\,\%$ — ici $\dfrac{2000}{80} = 25\,\%$ ✓
— **Autres cas utiles** : annuler $-50\,\%$ demande $+100\,\%$; annuler $-10\,\%$ demande $+11{,}11\,\%$.
— **Conséquence en bourse** : une perte de 50 % exige un gain de 100 % pour être effacée — d'où l'asymétrie bien connue des placements risqués.

Réponse. $-4\,\%$ globalement ; il faudrait $+25\,\%$ pour revenir au prix initial.

Correction de l'exercice 10 – Comparer arithmétique et géométrique

— **Rang** 5 : $u_5 = 2000$ et $v_5 = 1000 \times 1{,}61051 \approx 1610{,}5$ — l'**arithmétique** domine.
— **Rang** 10 : $u_{10} = 3000$ et $v_{10} = 1000 \times 2{,}59374 \approx 2593{,}7$ — encore l'arithmétique.
— **Rang** 20 : $u_{20} = 5000$ et $v_{20} = 1000 \times 6{,}72750 \approx 6727{,}5$ — cette fois la **géométrique** domine.
— **Rang de croisement** : on résout $1000 + 200n = 1000 \times 1{,}1^n$ numériquement.
— $n = 15$: 4000 contre 4177,2 — la géométrique est déjà passée devant.
— $n = 14$: 3800 contre 3797,5 — quasi-égalité, l'arithmétique tient encore de justesse.
— **Croisement** : entre les rangs 14 et 15 ✓
— **Loi générale** : une croissance **exponentielle** finit **toujours** par dépasser une croissance **linéaire**, quels que soient les coefficients — c'est le théorème des croissances comparées.
— **Au rang** 50 : $u_{50} = 11\,000$ contre $v_{50} \approx 117\,391$ — un facteur 10,7 ✓
— **Leçon financière** : sur le long terme, un taux d'intérêt, même modeste, l'emporte sur un versement fixe.

Réponse. L'arithmétique domine jusqu'au rang 14 ; la géométrique l'emporte ensuite.

Correction de l'exercice 11 – Suite géométrique et logarithme

— **Modèle** : $m_n = m_0 \times 0{,}97^n$.
— **Condition** : $0{,}97^n < 0{,}1$, soit (sens **inversé** car $\ln 0{,}97 < 0$)

$$n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}97} \approx \frac{-2{,}3026}{-0{,}030459} \approx 75{,}595$$

— **Conclusion** : 76 jours.
— **Vérifications** : $0{,}97^{75} \approx 0{,}101831 \geq 0{,}1$ ✓ et $0{,}97^{76} \approx 0{,}098776 < 0{,}1$ ✓
— **Demi-vie** : $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}97} \approx 22{,}76$ jours.
— **Contrôle de cohérence** : perdre 90 % correspond à un peu plus de trois demi-vies ($3 \times 22{,}76 \approx 68{,}3$ jours donnerait 12,5 %), et 76 jours est bien au-delà ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Vérification** : $0{,}97^{68} \approx 0{,}126031$, proche de $\frac{1}{8} = 0{,}125$ ✓

— **Règle des** 70 : la demi-vie approchée vaut $\frac{70}{3} \approx 23{,}3$ jours — très proche des 22,76 exacts ✓

— **Piège** : 3 % par jour pendant 33 jours ne fait pas disparaître la substance ; il en reste $0{,}97^{33} \approx 36{,}7\,\%$.

Réponse. 76 jours (demi-vie de 22,76 jours).

Correction de l’exercice 12 – Somme infinie

— **Nature** : suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{1}{3}$.

— **Condition de convergence** : $|q| = \frac{1}{3} < 1$ ✓

— **Formule** :

$$S = \frac{u_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

— **Contrôle par les sommes partielles** : 1 ; 1,3333 ; 1,4444 ; 1,4815 ; 1,4938 ; 1,4979 — la convergence vers 1,5 est nette ✓

— **Démonstration** : $S_n = \frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$, qui tend vers $\frac{3}{2}$ ✓

— **Reste** : $S - S_n = \frac{1}{2 \times 3^n}$ — il décroît très vite, ce qui explique la convergence rapide.

— **Contrôle** : $S - S_4 = 1{,}5 - 1{,}49383 = 0{,}00617$, et $\frac{1}{2 \times 81} \approx 0{,}00617$ ✓

— **Astuce de vérification** : $S = 1 + \frac{1}{3}S$ car la somme se reconstruit elle-même — d’où $\frac{2}{3}S = 1$ et $S = \frac{3}{2}$ ✓

— **Divergence** : avec $q = \frac{4}{3} > 1$, la somme serait infinie — la condition $|q| < 1$ est essentielle.

Réponse. $S = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Correction de l’exercice 13 – Taux annuel équivalent

— **Coefficient global** : $\frac{8000}{5000} = 1{,}6$.

— **Taux annuel** : on cherche q tel que $q^6 = 1{,}6$, soit

$$q = 1{,}6^{1/6} \approx 1{,}081484$$

— **Taux** : environ 8,15 % par an.

— **Vérification** : $5000 \times 1{,}081484^6 \approx 5000 \times 1{,}6 = 8000$ € ✓

— **Piège de la moyenne arithmétique** : $\frac{60\,\%}{6} = 10\,\%$ par an donnerait $5000 \times 1{,}1^6 \approx 8857{,}8$ € — nettement trop ✓

— **Contrôle année par année** :
$5000 \to 5406{,}7 \to 5846{,}6 \to 6322{,}2 \to 6836{,}5 \to 7392{,}6 \to 7994{,}0$ — l’écart final de 6 € vient des arrondis d’affichage ✓

— **Règle** : un taux moyen se calcule toujours par une **racine**, jamais par une division.

— **Ordre de grandeur** : 1,6 en 6 ans, c’est un doublement en environ $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}081484} \approx 8{,}85$ ans ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $q = 1{,}6^{1/6} \approx 1{,}0815$, soit environ 8,15 % par an.

Correction de l'exercice 14 – Suite à termes alternés

— **Termes** : 3 ; −6 ; 12 ; −24 ; 48.
— **Somme** :

$$S = 3 \times \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} = 3 \times \frac{1+32}{3} = 33$$

— **Contrôle direct** : $3 - 6 + 12 - 24 + 48 = 33$ ✓
— **Comportement** : les termes **alternent** de signe et leur valeur absolue **croît** sans limite ($|u_n| = 3 \times 2^n$).
— **Divergence** : la suite n'a **pas de limite** — elle oscille avec une amplitude croissante ✓
— **Conséquence** : la somme infinie **n'existe pas**, car $|q| = 2 > 1$.
— **Sommes partielles** : 3 ; −3 ; 9 ; −15 ; 33 ; −63 — elles oscillent aussi, en amplifiant ✓
— **Formule des sommes partielles** : $S_n = 3 \times \dfrac{1-(-2)^{n+1}}{3} = 1-(-2)^{n+1}$.
— **Contrôle** : $S_4 = 1-(-2)^5 = 1+32 = 33$ ✓ et $S_3 = 1-16 = -15$ ✓
— **À retenir** : une raison négative de valeur absolue supérieure à 1 donne le comportement le plus « chaotique » possible pour une suite géométrique.

Réponse. 3 ; −6 ; 12 ; −24 ; 48 et $S = 33$; suite divergente oscillante.

Correction de l'exercice 15 – Modèle de propagation

— **Modèle** : $u_n = 2 \times 3^n$.
— **Jour** 8 :

$$u_8 = 2 \times 6561 = 13\,122 \text{ personnes}$$

— **Seuil** : $2 \times 3^n \geq 200\,000$, soit $3^n \geq 100\,000$ et

$$n \geq \frac{\ln 100\,000}{\ln 3} \approx \frac{11{,}5129}{1{,}09861} \approx 10{,}479$$

— **Conclusion** : au jour 11.
— **Vérifications** : $u_{10} = 2 \times 59\,049 = 118\,098 < 200\,000$ ✓ et $u_{11} = 2 \times 177\,147 = 354\,294 \geq 200\,000$ ✓
— **Lecture** : 11 jours seulement pour informer une ville entière à partir de 2 personnes — la puissance de la croissance exponentielle.
— **Limite du modèle** : le jour 11, le modèle prédit 354 294 personnes, soit **plus** que la population. Un modèle réaliste doit **saturer** (courbe logistique) ✓
— **Contrôle de l'ordre de grandeur** : $3^{10} \approx 59\,000$ et $3^{11} \approx 177\,000$ — chaque jour multiplie par 3, donc le saut par-dessus 100 000 était inévitable ✓
— **Comparaison** : avec un doublement quotidien, il faudrait $\dfrac{\ln 100\,000}{\ln 2} \approx 16{,}6$, soit 17 jours.

Réponse. 13 122 personnes au jour 8 ; ville informée au jour 11.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : deux offres de placement

a) **Modèles** :

$$A_n = 10\,000 \times 1{,}04^n \quad \text{(géométrique)} \qquad B_n = 10\,000 + 450n \quad \text{(arithmétique)}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) **Comparaisons.**

— 5 **ans** : $A_5 = 10\,000 \times 1{,}216653 \approx 12\,166{,}5$ € contre $B_5 = 12\,250$ € — **B** l'emporte.
— 10 **ans** : $A_{10} \approx 14\,802{,}4$ € contre $B_{10} = 14\,500$ € — **A** l'emporte.
— 20 **ans** : $A_{20} \approx 21\,911{,}2$ € contre $B_{20} = 19\,000$ € — **A** largement devant.

c) **Année de croisement.** On cherche le plus petit n tel que $1{,}04^n > 1 + 0{,}045n$.

— $n = 6$: 1,265319 contre 1,27 — B encore devant (12 653,2 € contre 12 700 €).
— $n = 7$: 1,315932 contre 1,315 — **A passe devant** (13 159,3 € contre 13 150 €).
— **Conclusion** : A dépasse B à partir de la **7e année**, de très peu (9,3 €).
— **Contrôle** : l'écart se creuse ensuite vite — 302,4 € à 10 ans, 2911,2 € à 20 ans ✓
— **Interprétation** : les 450 € fixes de B correspondent à 4,5 % du capital **initial**, plus que les 4 % de A la première année — mais A calcule ses intérêts sur un capital qui **grossit**, ce qui finit par l'emporter.
— **Sur** 30 **ans** : $A_{30} \approx 32\,433{,}9$ € contre $B_{30} = 23\,500$ € — près de 9000 € d'écart ✓
— **Leçon** : les intérêts **composés** battent toujours les intérêts **simples** à long terme, même avec un taux affiché plus faible.

Réponse. b) B gagne à 5 ans, A à 10 et 20 ans · c) A dépasse B dès la 7e année.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).