# Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modèles économiques, suites auxiliaires et sommes

## Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

### Boîte à outils

**Suite arithmético-géométrique.** Pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ :

1. On cherche le **point fixe** $\ell$ solution de $a\ell + b = \ell$, soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. 2. On pose $v_n = u_n - \ell$ ; alors $v_{n+1} = av_n$ : la suite $(v_n)$ est **géométrique** de raison $a$. 3. On en déduit $v_n = v_0 a^n$, puis

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$$

4. **Limite** : si $|a| < 1$, alors $u_n \to \ell$ ; si $|a| > 1$, la suite diverge.

**Sommes utiles.**

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\alpha + \beta q^k\right) = (n+1)\alpha + \beta \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Modèles économiques classiques.**

| Situation | Récurrence |
|---|---|
| capital à intérêts composés | $C_{n+1} = (1+t)C_n$ |
| capital avec versement annuel | $C_{n+1} = (1+t)C_n + V$ |
| remboursement de prêt | $C_{n+1} = (1+t)C_n - M$ |
| population avec migration | $P_{n+1} = aP_n + m$ |

**Repères de calcul mental.**

— **Règle des** 70 : le temps de doublement à $t\,\%$ vaut environ $\dfrac{70}{t}$ périodes.

— **Annuler une baisse de** $t\,\%$ demande une hausse de $\dfrac{100t}{100-t}\,\%$.

— Un **taux moyen** se calcule par une **racine**, jamais par une moyenne arithmétique.

## Correction de l’exercice 1 – Suite auxiliaire

— **Point fixe** : $3\ell - 4 = \ell$ donne $2\ell = 4$, donc $\ell = 2$.

— **Suite auxiliaire** : $v_n = u_n - 2$, alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3(u_n - 2) = 3v_n$$

— $(v_n)$ **est géométrique** de raison 3 et de premier terme $v_0 = -1$, donc $v_n = -3^n$ et

$$u_n = 2 - 3^n$$

— **Contrôles** : $u_0 = 2 - 1 = 1$ ✓ ; $u_1 = 2 - 3 = -1$, et directement $3 \times 1 - 4 = -1$ ✓ ; $u_2 = 2 - 9 = -7$, et $3 \times (-1) - 4 = -7$ ✓

— **Limite** : $3^n \to +\infty$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

— **Attention** : ici $|a| = 3 > 1$, la suite **diverge** — le point fixe 2 n'est pas une limite mais un point **répulsif**.
— **Contre-exemple** : si l'on partait de $u_0 = 2$ exactement, la suite serait **constante** égale à 2. Toute autre valeur initiale s'en éloigne ✓

**Réponse.** $u_n = 2 - 3^n$, de limite $-\infty$.

## Correction de l'exercice 2 – Épargne avec versements annuels

— **Récurrence** : $C_0 = 2000$ et $C_{n+1} = 1{,}04C_n + 500$.
— **Point fixe** : $1{,}04\ell + 500 = \ell$ donne $-0{,}04\ell = 500$, donc $\ell = -12\,500$.
— **Suite auxiliaire** : $v_n = C_n + 12\,500$, géométrique de raison 1,04 avec $v_0 = 14\,500$.
— **Forme explicite** :

$$C_n = 14\,500 \times 1{,}04^n - 12\,500$$

— **Contrôles** : $C_0 = 14\,500 - 12\,500 = 2000$ ✓ ; $C_1 = 15\,080 - 12\,500 = 2580$, et directement $2080 + 500 = 2580$ ✓
— **Au bout de** 15 **ans** :

$$C_{15} = 14\,500 \times 1{,}04^{15} - 12\,500 \approx 14\,500 \times 1{,}800944 - 12\,500 \approx 13\,613{,}7\ €$$

— **Décomposition** : 2000 € initiaux + 15 × 500 = 7500 € versés = 9500 € de mise, pour 13 613,7 € au final — soit 4113,7 € d'intérêts ✓
— **Divergence** : $1{,}04 > 1$, donc $C_n \to +\infty$ — le point fixe négatif n'a ici aucune interprétation financière, il n'est qu'un **outil de calcul**.
— **Au bout de** 30 **ans** : $14\,500 \times 1{,}04^{30} - 12\,500 \approx 34\,529{,}5$ €.

**Réponse.** $C_n = 14\,500 \times 1{,}04^n - 12\,500$ ; $C_{15} \approx 13\,614$ €.

## Correction de l'exercice 3 – Remboursement de prêt

— **Récurrence** : $C_0 = 20\,000$ et $C_{n+1} = 1{,}004C_n - 400$.
— **Point fixe** : $1{,}004\ell - 400 = \ell$ donne $0{,}004\ell = 400$, donc $\ell = 100\,000$.
— **Suite auxiliaire** : $v_n = C_n - 100\,000$, géométrique de raison 1,004 avec $v_0 = -80\,000$.
— **Forme explicite** :

$$C_n = 100\,000 - 80\,000 \times 1{,}004^n$$

— **Contrôles** : $C_0 = 20\,000$ ✓ ; $C_1 = 100\,000 - 80\,320 = 19\,680$, et directement $20\,080 - 400 = 19\,680$ ✓
— **Solde** : $C_n \leq 0$ équivaut à $1{,}004^n \geq 1{,}25$, soit

$$n \geq \frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}004} \approx \frac{0{,}22314}{0{,}0039920} \approx 55{,}90$$

— **Réponse** : **56 mensualités**, soit 4 ans et 8 mois.
— **Vérifications** : $C_{55} = 100\,000 - 80\,000 \times 1{,}004^{55} \approx 100\,000 - 99\,642{,}4 \approx 357{,}6 > 0$ ✓
— $C_{56} \approx 100\,000 - 100\,041{,}0 \approx -41{,}0 \leq 0$ ✓ — la dernière mensualité est réduite d'environ 41 €.
— **Coût total** : environ $56 \times 400 = 22\,400$ €, dont 2400 € d'intérêts ✓
— **Lecture** : 12 % du montant emprunté part en intérêts.

**Réponse.** $C_n = 100\,000 - 80\,000 \times 1{,}004^n$ ; 56 mensualités (2400 € d'intérêts).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 4 – Population avec migration

— **Récurrence** : $P_0 = 80\,000$ et $P_{n+1} = 0{,}97P_n + 1500$.
— **Point fixe** : $0{,}97\ell + 1500 = \ell$ donne $0{,}03\ell = 1500$, donc
$$\ell = 50\,000$$
— **Suite auxiliaire** : $v_n = P_n - 50\,000$, géométrique de raison 0,97 avec $v_0 = 30\,000$.
— **Forme explicite** :
$$P_n = 50\,000 + 30\,000 \times 0{,}97^n$$
— **Limite** : $0{,}97^n \to 0$, donc $P_n \to 50\,000$ — la ville **décroît** vers 50 000 habitants.
— **Contrôles** : $P_0 = 80\,000$ ✓ ; $P_1 = 50\,000 + 29\,100 = 79\,100$, et directement $77\,600 + 1500 = 79\,100$ ✓
— **Valeurs** : $P_{10} \approx 50\,000 + 22\,123 = 72\,123$ ; $P_{50} \approx 50\,000 + 6542 = 56\,542$ ; $P_{100} \approx 51\,427$ ✓
— **Passage sous** 60 000 : $0{,}97^n < \dfrac{1}{3}$ donne $n > \dfrac{\ln(1/3)}{\ln 0{,}97} \approx 36{,}07$, soit la 37e année ✓
— **Interprétation** : la population se stabilise là où les départs (3 %) compensent exactement les arrivées : $0{,}03 \times 50\,000 = 1500$ ✓
— **Si les arrivées passaient à** 2400 : la limite serait $\dfrac{2400}{0{,}03} = 80\,000$ — la ville serait **stable** dès le départ.

**Réponse.** $P_n = 50\,000 + 30\,000 \times 0{,}97^n$, de limite 50 000 habitants.

## Correction de l'exercice 5 – Somme mixte

— **Décomposition** : la somme se scinde en une partie **constante** et une partie **géométrique**.
$$S = \sum_{k=0}^{10} 3 + 2\sum_{k=0}^{10} 0{,}5^k = 11 \times 3 + 2 \times \frac{1 - 0{,}5^{11}}{1 - 0{,}5}$$
— **Calcul de la somme géométrique** : $\dfrac{1 - 0{,}00048828}{0{,}5} \approx 1{,}99902$.
— **Total** :
$$S \approx 33 + 2 \times 1{,}99902 = 33 + 3{,}99805 = 36{,}99805$$
— **Contrôles** : $u_0 = 5$ ; $u_1 = 4$ ; $u_2 = 3{,}5$ ; $u_3 = 3{,}25$ ; $u_4 = 3{,}125$ ✓
— **Somme des cinq premiers** : $5 + 4 + 3{,}5 + 3{,}25 + 3{,}125 = 18{,}875$.
— **Contrôle par la formule** : $5 \times 3 + 2 \times \dfrac{1 - 0{,}5^5}{0{,}5} = 15 + 2 \times 1{,}9375 = 18{,}875$ ✓
— **Limite de la somme** : $S_n \approx 3(n+1) + 4$ pour $n$ grand — la partie géométrique se stabilise à 4 ✓
— **Contrôle** : $2 \times \dfrac{1}{0{,}5} = 4$ ✓
— **Méthode générale** : une somme de la forme $\sum(\alpha + \beta q^k)$ se traite **terme par terme**, jamais globalement.

**Réponse.** $S \approx 36{,}998$ (exactement $37 - \dfrac{1}{512}$).

## Correction de l'exercice 6 – Deux modèles d'abonnement

— **Offre A** (arithmétique) : $a_n = 15 + 0{,}5n$ €/mois pour l'année $n$ (avec $n = 0$ la première année).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Offre B** (géométrique) : $b_n = 12 \times 1{,}06^n$ €/mois.
— **Comparaison année par année** :
— Année 0 : 15 contre 12 — B moins cher.
— Année 5 : 17,50 contre $12 \times 1{,}338226 \approx 16{,}06$ — B encore moins cher.
— Année 9 : 19,50 contre $12 \times 1{,}689479 \approx 20{,}27$ — A devient moins cher.
— **Coût total sur** 10 **ans** (en mois, soit ×12) :
— **A** : $12 \times (10 \times 15 + 0{,}5 \times 45) = 12 \times (150 + 22{,}5) = 12 \times 172{,}5 = 2070$ €.
— **B** : $12 \times 12 \times \dfrac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} = 144 \times \dfrac{0{,}790848}{0{,}06} \approx 144 \times 13{,}18079 \approx 1898{,}0$ €.
— **Conclusion** : l'offre **B** est moins chère sur 10 ans (1898 € contre 2070 €).
— **Contrôles** : $1{,}06^{10} \approx 1{,}790848$ ✓ ; $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$ ✓
— **Sur** 20 **ans** : A coûterait $12 \times (300 + 0{,}5 \times 190) = 12 \times 395 = 4740$ € ; B coûterait $144 \times \dfrac{1{,}06^{20} - 1}{0{,}06} \approx 144 \times 36{,}7856 \approx 5297{,}1$ € — cette fois **A** l'emporte ✓
— **Leçon** : l'exponentielle finit toujours par dépasser le linéaire, mais le **moment** du basculement dépend de l'horizon considéré.

**Réponse.** B sur 10 ans (1898 € contre 2070 €), mais A sur 20 ans.

## Correction de l'exercice 7 – Suite et récurrence à deux termes

— **Calculs** :
— $u_2 = 6 - 2 = 4$ ;
— $u_3 = 12 - 4 = 8$ ;
— $u_4 = 24 - 8 = 16$ ;
— $u_5 = 48 - 16 = 32$.
— **Conjecture** : $u_n = 2^n$.
— **Vérification de la récurrence** : $3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n = 6 \times 2^n - 2 \times 2^n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ ✓
— **Vérification des conditions initiales** : $2^0 = 1$ ✓ et $2^1 = 2$ ✓
— **Conclusion** : la conjecture est démontrée — la suite est **géométrique** de raison 2.
— **Remarque** : ce n'était pas évident a priori ; une récurrence à deux termes donne en général une **combinaison** de deux suites géométriques.
— **Méthode générale** : on cherche les $r$ tels que $r^2 = 3r - 2$, soit $r^2 - 3r + 2 = 0$ et $r \in \{1\,;2\}$. La solution générale est $u_n = A + B \times 2^n$.
— **Détermination** : $A + B = 1$ et $A + 2B = 2$ donnent $B = 1$ et $A = 0$, d'où $u_n = 2^n$ ✓
— **Autre condition initiale** : avec $u_0 = 3$ et $u_1 = 4$, on aurait $A = 2$ et $B = 1$, soit $u_n = 2 + 2^n$.

**Réponse.** 4 ; 8 ; 16 ; 32 — et $u_n = 2^n$.

## Correction de l'exercice 8 – Dose de médicament

— **Récurrence** : $q_0 = 200$ (juste après la première prise) et $q_{n+1} = 0{,}6q_n + 200$.
— **Point fixe** : $0{,}6\ell + 200 = \ell$ donne $0{,}4\ell = 200$, donc

$$\ell = 500 \text{ mg}$$

— **Suite auxiliaire** : $v_n = q_n - 500$, géométrique de raison 0,6 avec $v_0 = -300$.
— **Forme explicite** :

$$q_n = 500 - 300 \times 0{,}6^n$$

— **Limite** : $q_n \to 500$ mg — la quantité **se stabilise** ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôles** : $q_0 = 200$ ✓ ; $q_1 = 500 - 180 = 320$, et directement $120 + 200 = 320$ ✓ ; $q_2 = 500 - 108 = 392$ ✓

— **Valeurs** : $q_5 \approx 500 - 23{,}328 = 476{,}7$ mg ; $q_{10} \approx 498{,}2$ mg ✓

— **Palier atteint à** 1 % **près** : $300 \times 0{,}6^n < 5$ donne $n > \dfrac{\ln(1/60)}{\ln 0{,}6} \approx 8{,}01$, soit 9 jours ✓

— **Interprétation médicale** : c'est le **plateau thérapeutique**. Si la dose toxique était de 450 mg, ce traitement serait dangereux à partir du 4e jour ($q_4 = 500 - 38{,}88 = 461{,}1$ mg) — d'où l'importance de calculer le plateau, et non la seule dose journalière.

— **Contrôle du plateau** : à l'équilibre, l'élimination $0{,}4 \times 500 = 200$ mg compense exactement la prise ✓

**Réponse.** $q_n = 500 - 300 \times 0{,}6^n$, de limite 500 mg.

## Correction de l'exercice 9 – Intérêts composés et temps de doublement

— **Condition** : $(1+t)^{12} = 2$, donc

$$1 + t = 2^{1/12} \approx 1{,}059463$$

— **Taux** : environ 5,95 % par an.

— **Vérification** : $1{,}059463^{12} \approx 2$ ✓

— **Règle des** 70 : elle prédit $\dfrac{70}{12} \approx 5{,}83\,\%$ — très proche des 5,95 % exacts ✓

— **Écart** : 0,12 point, soit une erreur relative de 2 % — la règle est excellente pour un calcul mental.

— **Origine de la règle** : $\ln 2 \approx 0{,}693$, et pour $t$ petit $\ln(1+t) \approx t$, donc $n \approx \dfrac{0{,}693}{t} = \dfrac{69{,}3}{100t}$ ✓

— **Précision selon le taux** : la règle est très bonne pour $t$ entre 2 % et 10 % ; à 20 %, elle prédit 3,5 ans contre 3,80 réels.

— **Autres cas** : doubler en 10 ans demande 7,18 % (règle : 7 %) ; en 20 ans, 3,53 % (règle : 3,5 %) ✓

— **Triplement** : $\dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}059463} \approx 19{,}02$ ans — presque le double du temps de doublement, cohérent avec $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}585$.

**Réponse.** $t = 2^{1/12} - 1 \approx 5{,}95\,\%$ (la règle des 70 donne 5,83 %).

## Correction de l'exercice 10 – Somme des carrés

— **Première somme** :

$$\frac{20 \times 21 \times 41}{6} = \frac{17\,220}{6} = 2870$$

— **Somme jusqu'à** 10 : $\dfrac{10 \times 11 \times 21}{6} = \dfrac{2310}{6} = 385$.

— **Différence** :

$$11^2 + \cdots + 20^2 = 2870 - 385 = 2485$$

— **Contrôles partiels** : $121 + 144 + 169 = 434$, et $\dfrac{13 \times 14 \times 27}{6} - 385 = 819 - 385 = 434$ ✓

— **Contrôle de la formule** : pour $n = 3$, $\dfrac{3 \times 4 \times 7}{6} = 14 = 1 + 4 + 9$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Ordre de grandeur** : la somme des carrés jusqu'à $n$ est de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ — ici $\frac{8000}{3} \approx 2667$, proche de 2870 ✓

— **Remarque** : la suite $(n^2)$ n'est **ni** arithmétique **ni** géométrique, mais la suite de ses **différences** $(2n+1)$ est arithmétique.

— **Somme des cubes** : $1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, soit $210^2 = 44\,100$ pour $n = 20$ ✓

**Réponse.** 2870 et 2485.

## Correction de l'exercice 11 – Modèle de recyclage

— **Récurrence** : $S_{n+1} = 0{,}25 S_n + 10\,000$ (il reste 25 % du stock, plus la production nouvelle), avec $S_0 = 10\,000$.

— **Point fixe** : $0{,}25\ell + 10\,000 = \ell$ donne $0{,}75\ell = 10\,000$, donc

$$\ell = \frac{40\,000}{3} \approx 13\,333{,}3 \text{ tonnes}$$

— **Suite auxiliaire** : $v_n = S_n - \frac{40\,000}{3}$, géométrique de raison 0,25 avec $v_0 = -\frac{10\,000}{3}$.

— **Forme explicite** :

$$S_n = \frac{40\,000}{3} - \frac{10\,000}{3} \times 0{,}25^n$$

— **Limite** : $S_n \to \frac{40\,000}{3} \approx 13\,333{,}3$ tonnes ✓

— **Contrôles** : $S_0 = \frac{40\,000 - 10\,000}{3} = 10\,000$ ✓ ;
$S_1 = \frac{40\,000}{3} - \frac{2500}{3} = \frac{37\,500}{3} = 12\,500$, et directement $2500 + 10\,000 = 12\,500$ ✓

— **Convergence rapide** : $S_3 \approx 13\,281{,}3$ et $S_5 \approx 13\,330{,}1$ — le régime permanent est atteint en quatre ou cinq ans ✓

— **Vérification du plateau** : à l'équilibre, on recycle $0{,}75 \times 13\,333{,}3 \approx 10\,000$ tonnes, exactement la production ✓

— **Effet d'un meilleur recyclage** : à 90 %, le stock limite tomberait à $\frac{10\,000}{0{,}9} \approx 11\,111$ tonnes.

**Réponse.** $S_n = \frac{40\,000}{3}\left(1 - 0{,}25^n\right) + 10\,000 \times 0{,}25^n$, de limite $\frac{40\,000}{3} \approx 13\,333$ t.

## Correction de l'exercice 12 – Suite auxiliaire à trouver

— **Calcul** :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n}{2} + 1 - 2 = \frac{u_n}{2} - 1 = \frac{u_n - 2}{2} = \frac{v_n}{2}$$

— **Conclusion** : $(v_n)$ est **géométrique** de raison $\frac{1}{2}$ ✓

— **Premier terme** : $v_0 = 5 - 2 = 3$, donc $v_n = 3 \times 0{,}5^n$.

— **Forme explicite** :

$$u_n = 2 + 3 \times 0{,}5^n$$

— **Contrôles** : $u_0 = 5$ ✓ ; $u_1 = 2 + 1{,}5 = 3{,}5$, et directement $2{,}5 + 1 = 3{,}5$ ✓ ;
$u_2 = 2 + 0{,}75 = 2{,}75$ ✓

— **Limite** : $u_n \to 2$, le **point fixe** de la relation ✓

— **Vérification du point fixe** : $\frac{x}{2} + 1 = x$ donne $x = 2$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Décroissance** : $(v_n)$ est positive décroissante, donc $(u_n)$ décroît vers 2 en restant **au-dessus** ✓

— **Somme** : $u_0 + \cdots + u_n = 2(n+1) + 3 \times \dfrac{1 - 0{,}5^{n+1}}{0{,}5} = 2(n+1) + 6\left(1 - 0{,}5^{n+1}\right)$.

— **Contrôle pour** $n = 2$ : $6 + 6(1 - 0{,}125) = 6 + 5{,}25 = 11{,}25$, et directement $5 + 3{,}5 + 2{,}75 = 11{,}25$ ✓

**Réponse.** $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$ ; $u_n = 2 + 3 \times 0{,}5^n$, de limite 2.

## Correction de l'exercice 13 – Comparaison de plans de retraite

**Plan A** — somme géométrique (le premier versement fructifie 19 ans, le dernier 0 an) :

$$C_A = 3000 \times \frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03} = 3000 \times \frac{0{,}806111}{0{,}03} \approx 3000 \times 26{,}87037 \approx 80\,611{,}1 \text{ €}$$

**Plan B** — intérêts composés sur la totalité :

$$C_B = 60\,000 \times 1{,}03^{20} \approx 60\,000 \times 1{,}806111 \approx 108\,366{,}7 \text{ €}$$

**Comparaison.**

— **B rapporte nettement plus** (108 367 € contre 80 611 €), pour la même mise totale de 60 000 €.

— **Raison** : dans le plan B, **tout** le capital fructifie pendant 20 ans ; dans le plan A, le versement moyen ne fructifie que 9,5 ans.

— **Contrôle** : $60\,000 \times 1{,}03^{9{,}5} \approx 79\,452$ €, très proche des 80 611 € du plan A ✓

— **Intérêts** : 20 611 € pour A contre 48 367 € pour B ✓

— **Nuance pratique** : B exige de disposer de 60 000 € **immédiatement**, ce qui est rarement le cas — A est le plan réaliste.

— **Versement équivalent** : pour égaler B, il faudrait verser $\dfrac{108\,366{,}7}{26{,}87037} \approx 4032{,}9$ € par an dans le plan A ✓

**Réponse.** A : ≈ 80 611 € · B : ≈ 108 367 € — B gagne (tout fructifie 20 ans).

## Correction de l'exercice 14 – Limite d'une suite auxiliaire

— **Point fixe** : $0{,}9\ell + 2 = \ell$ donne $0{,}1\ell = 2$, donc $\ell = 20$.

— **Suite auxiliaire** : $v_n = u_n - 20$, géométrique de raison 0,9 avec $v_0 = -10$.

— **Forme explicite** :

$$u_n = 20 - 10 \times 0{,}9^n$$

— **Limite** : $u_n \to 20$, par valeurs **inférieures** ✓

— **Contrôles** : $u_0 = 10$ ✓ ; $u_1 = 20 - 9 = 11$, et directement $9 + 2 = 11$ ✓ ; $u_2 = 20 - 8{,}1 = 11{,}9$ ✓

— **Seuil** : $20 - 10 \times 0{,}9^n > 19{,}9$ équivaut à $0{,}9^n < 0{,}01$, soit

$$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9} \approx \frac{-4{,}6052}{-0{,}10536} \approx 43{,}71$$

— **Réponse** : $n = 44$.

— **Vérifications** : $u_{43} = 20 - 10 \times 0{,}9^{43} \approx 20 - 0{,}107753 = 19{,}8922 \leq 19{,}9$ ✓

— $u_{44} \approx 20 - 0{,}096977 = 19{,}9030 > 19{,}9$ ✓

— **Avertissement sur le seuil** : la suite est **majorée par** 20, donc un seuil de 20,1 ne serait **jamais** atteint et une boucle *while* tournerait indéfiniment ✓

**Réponse.** Limite 20 ; $u_n > 19{,}9$ à partir de $n = 44$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 15 – Suite et aire

— **Côtés** : $c_n = 0{,}8^n$, donc les **aires** valent $a_n = 0{,}64^n$ — géométrique de raison 0,64 ✓

— **Somme des** 10 **premières** :

$$S_9 = \frac{1 - 0{,}64^{10}}{1 - 0{,}64} = \frac{1 - 0{,}011529}{0{,}36} \approx \frac{0{,}988471}{0{,}36} \approx 2{,}74575$$

— **Somme infinie** :

$$S = \frac{1}{1 - 0{,}64} = \frac{1}{0{,}36} \approx 2{,}77778$$

— **Contrôle** : $S - S_9 = \frac{0{,}64^{10}}{0{,}36} \approx 0{,}032025$ ✓, et $2{,}74575 + 0{,}032025 \approx 2{,}77778$ ✓

— **Premières aires** : 1 ; 0,64 ; 0,4096 ; 0,262144 ; 0,16777 ✓

— **Sommes partielles** : 1 ; 1,64 ; 2,0496 ; 2,31174 ; 2,47952 — convergence vers 2,7778 ✓

— **Erreur à éviter** : la raison des **aires** est $0{,}8^2 = 0{,}64$, **pas** 0,8 — l'aire varie comme le **carré** du côté.

— **Somme des périmètres** : de raison 0,8, elle vaut $\frac{4}{1 - 0{,}8} = 20$ — bien plus grande relativement, car les périmètres décroissent plus lentement ✓

**Réponse.** $\approx 2{,}746$ pour 10 carrés ; $\frac{1}{0{,}36} \approx 2{,}778$ au total.

## Correction de l'exercice 16 – Synthèse : location ou achat

a) **Valeur résiduelle** — suite géométrique de raison 0,85 :

$$V_5 = 30\,000 \times 0{,}85^5 \approx 30\,000 \times 0{,}443705 \approx 13\,311{,}2\ €$$

b) **Coût de la location** — somme géométrique de raison 1,04, 5 termes :

$$L = 6000 \times \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} = 6000 \times \frac{0{,}216653}{0{,}04} \approx 6000 \times 5{,}416323 \approx 32\,497{,}9\ €$$

c) **Comparaison.**

— **Achat** : on dépense 30 000 € et l'on récupère 13 311,2 € à la revente, soit un coût réel de

$$30\,000 - 13\,311{,}2 = 16\,688{,}8\ €$$

— **Location** : 32 497,9 €, sans aucune valeur résiduelle.

— **Conclusion** : l'**achat** est près de **deux fois** moins cher (16 689 € contre 32 498 €) ✓

— **Contrôles** : $0{,}85^5 \approx 0{,}443705$ ✓ ; les loyers successifs valent 6000 ; 6240 ; 6489,6 ; 6749,2 ; 7019,2 €, de somme 32 498 € ✓

— **Point d'équilibre** : la location deviendrait compétitive si le loyer initial tombait à $6000 \times \frac{16\,688{,}8}{32\,497{,}9} \approx 3081{,}2$ € — soit presque la moitié.

— **Sur** 10 **ans** : achat $30\,000 - 30\,000 \times 0{,}85^{10} \approx 30\,000 - 5906{,}2 = 24\,093{,}8$ € contre location $6000 \times \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} \approx 72\,036{,}6$ € — l'écart se creuse encore ✓

— **Nuance** : ce calcul ignore le coût du capital immobilisé, la maintenance et les avantages fiscaux, qui peuvent inverser la conclusion dans un vrai dossier.

**Réponse.** a) ≈ 13 311 € · b) ≈ 32 498 € · c) achat 16 689 € contre location 32 498 € — l'achat gagne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).