

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : modèles économiques, suites auxiliaires et sommes

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Suite arithmético-géométrique. Pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$:

1. On cherche le **point fixe** ℓ solution de $a\ell + b = \ell$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$. 2. On pose $v_n = u_n - \ell$; alors $v_{n+1} = av_n$: la suite (v_n) est **géométrique** de raison a . 3. On en déduit $v_n = v_0 a^n$, puis

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$$

4. **Limite** : si $|a| < 1$, alors $u_n \rightarrow \ell$; si $|a| > 1$, la suite diverge.

Sommes utiles.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^n (\alpha + \beta q^k) = (n+1)\alpha + \beta \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Modèles économiques classiques.

Situation	Récurrence
capital à intérêts composés	$C_{n+1} = (1+t)C_n$
capital avec versement annuel	$C_{n+1} = (1+t)C_n + V$
remboursement de prêt	$C_{n+1} = (1+t)C_n - M$
population avec migration	$P_{n+1} = aP_n + m$

Repères de calcul mental.

- **Règle des 70** : le temps de doublement à $t\%$ vaut environ $\frac{70}{t}$ périodes.
- **Annuler une baisse de $t\%$** demande une hausse de $\frac{100t}{100-t}\%$.
- Un **taux moyen** se calcule par une **racine**, jamais par une moyenne arithmétique.

Correction de l'exercice 1 - Suite auxiliaire

- **Point fixe** : $3\ell - 4 = \ell$ donne $2\ell = 4$, donc $\ell = 2$.
- **Suite auxiliaire** : $v_n = u_n - 2$, alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3(u_n - 2) = 3v_n$$
- (v_n) **est géométrique** de raison 3 et de premier terme $v_0 = -1$, donc $v_n = -3^n$ et

$$u_n = 2 - 3^n$$
- **Contrôles** : $u_0 = 2 - 1 = 1 \checkmark$; $u_1 = 2 - 3 = -1$, et directement $3 \times 1 - 4 = -1 \checkmark$; $u_2 = 2 - 9 = -7$, et $3 \times (-1) - 4 = -7 \checkmark$
- **Limite** : $3^n \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

- **Attention** : ici $|a| = 3 > 1$, la suite **diverge** — le point fixe 2 n'est pas une limite mais un point **répulsif**.
- **Contre-exemple** : si l'on partait de $u_0 = 2$ exactement, la suite serait **constante** égale à 2. Toute autre valeur initiale s'en éloigne ✓

Réponse. $u_n = 2 - 3^n$, de limite $-\infty$.

Correction de l'exercice 2 - Épargne avec versements annuels

- **Récurrence** : $C_0 = 2000$ et $C_{n+1} = 1,04C_n + 500$.
- **Point fixe** : $1,04\ell + 500 = \ell$ donne $-0,04\ell = 500$, donc $\ell = -12\,500$.
- **Suite auxiliaire** : $v_n = C_n + 12\,500$, géométrique de raison 1,04 avec $v_0 = 14\,500$.
- **Forme explicite** :

$$C_n = 14\,500 \times 1,04^n - 12\,500$$

- **Contrôles** : $C_0 = 14\,500 - 12\,500 = 2000$ ✓ ; $C_1 = 15\,080 - 12\,500 = 2580$, et directement $2080 + 500 = 2580$ ✓
- **Au bout de 15 ans** :

$$C_{15} = 14\,500 \times 1,04^{15} - 12\,500 \approx 14\,500 \times 1,800944 - 12\,500 \approx 13\,613,7 \text{ €}$$

- **Décomposition** : 2000 € initiaux + $15 \times 500 = 7500$ € versés = 9500 € de mise, pour 13 613,7 € au final — soit 4113,7 € d'intérêts ✓
- **Divergence** : $1,04 > 1$, donc $C_n \rightarrow +\infty$ — le point fixe négatif n'a ici aucune interprétation financière, il n'est qu'un **outil de calcul**.
- **Au bout de 30 ans** : $14\,500 \times 1,04^{30} - 12\,500 \approx 34\,529,5$ €.

Réponse. $C_n = 14\,500 \times 1,04^n - 12\,500$; $C_{15} \approx 13\,614$ €.

Correction de l'exercice 3 - Remboursement de prêt

- **Récurrence** : $C_0 = 20\,000$ et $C_{n+1} = 1,004C_n - 400$.
- **Point fixe** : $1,004\ell - 400 = \ell$ donne $0,004\ell = 400$, donc $\ell = 100\,000$.
- **Suite auxiliaire** : $v_n = C_n - 100\,000$, géométrique de raison 1,004 avec $v_0 = -80\,000$.
- **Forme explicite** :

$$C_n = 100\,000 - 80\,000 \times 1,004^n$$

- **Contrôles** : $C_0 = 20\,000$ ✓ ; $C_1 = 100\,000 - 80\,320 = 19\,680$, et directement $20\,080 - 400 = 19\,680$ ✓
- **Solde** : $C_n \leq 0$ équivaut à $1,004^n \geq 1,25$, soit

$$n \geq \frac{\ln 1,25}{\ln 1,004} \approx \frac{0,22314}{0,0039920} \approx 55,90$$

- **Réponse** : **56 mensualités**, soit 4 ans et 8 mois.
- **Vérifications** : $C_{55} = 100\,000 - 80\,000 \times 1,004^{55} \approx 100\,000 - 99\,642,4 \approx 357,6 > 0$ ✓
- $C_{56} \approx 100\,000 - 100\,041,0 \approx -41,0 \leq 0$ ✓ — la dernière mensualité est réduite d'environ 41 €.
- **Coût total** : environ $56 \times 400 = 22\,400$ €, dont 2400 € d'intérêts ✓
- **Lecture** : 12 % du montant emprunté part en intérêts.

Réponse. $C_n = 100\,000 - 80\,000 \times 1,004^n$; 56 mensualités (2400 € d'intérêts).

Correction de l'exercice 4 - Population avec migration

- **Récurrence** : $P_0 = 80\,000$ et $P_{n+1} = 0,97P_n + 1500$.
- **Point fixe** : $0,97\ell + 1500 = \ell$ donne $0,03\ell = 1500$, donc

$$\ell = 50\,000$$
- **Suite auxiliaire** : $v_n = P_n - 50\,000$, géométrique de raison $0,97$ avec $v_0 = 30\,000$.
- **Forme explicite** :

$$P_n = 50\,000 + 30\,000 \times 0,97^n$$
- **Limite** : $0,97^n \rightarrow 0$, donc $P_n \rightarrow 50\,000$ — la ville **décroît** vers $50\,000$ habitants.
- **Contrôles** : $P_0 = 80\,000 \checkmark$; $P_1 = 50\,000 + 29\,100 = 79\,100$, et directement $77\,600 + 1500 = 79\,100 \checkmark$
- **Valeurs** : $P_{10} \approx 50\,000 + 22\,123 = 72\,123$; $P_{50} \approx 50\,000 + 6542 = 56\,542$;
 $P_{100} \approx 51\,427 \checkmark$
- **Passage sous** $60\,000$: $0,97^n < \frac{1}{3}$ donne $n > \frac{\ln(1/3)}{\ln 0,97} \approx 36,07$, soit la 37^e année $\checkmark$
- **Interprétation** : la population se stabilise là où les départs (3 %) compensent exactement les arrivées : $0,03 \times 50\,000 = 1500 \checkmark$
- **Si les arrivées passaient à 2400** : la limite serait $\frac{2400}{0,03} = 80\,000$ — la ville serait **stable** dès le départ.

Réponse. $P_n = 50\,000 + 30\,000 \times 0,97^n$, de limite $50\,000$ habitants.

Correction de l'exercice 5 - Somme mixte

- **Décomposition** : la somme se scinde en une partie **constante** et une partie **géométrique**.

$$S = \sum_{k=0}^{10} 3 + 2 \sum_{k=0}^{10} 0,5^k = 11 \times 3 + 2 \times \frac{1 - 0,5^{11}}{1 - 0,5}$$

- **Calcul de la somme géométrique** : $\frac{1 - 0,00048828}{0,5} \approx 1,99902$.
- **Total** :

$$S \approx 33 + 2 \times 1,99902 = 33 + 3,99805 = 36,99805$$
- **Contrôles** : $u_0 = 5$; $u_1 = 4$; $u_2 = 3,5$; $u_3 = 3,25$; $u_4 = 3,125 \checkmark$
- **Somme des cinq premiers** : $5 + 4 + 3,5 + 3,25 + 3,125 = 18,875$.
- **Contrôle par la formule** : $5 \times 3 + 2 \times \frac{1 - 0,5^5}{0,5} = 15 + 2 \times 1,9375 = 18,875 \checkmark$
- **Limite de la somme** : $S_n \approx 3(n+1) + 4$ pour n grand — la partie géométrique se stabilise à $4 \checkmark$
- **Contrôle** : $2 \times \frac{1}{0,5} = 4 \checkmark$
- **Méthode générale** : une somme de la forme $\sum (\alpha + \beta q^k)$ se traite **terme par terme**, jamais globalement.

Réponse. $S \approx 36,998$ (exactement $37 - \frac{1}{512}$).

Correction de l'exercice 6 - Deux modèles d'abonnement

- **Offre A** (arithmétique) : $a_n = 15 + 0,5n$ €/mois pour l'année n (avec $n = 0$ la première année).

- **Offre B** (géométrique) : $b_n = 12 \times 1,06^n$ €/mois.
- **Comparaison année par année** :
- Année 0 : 15 contre 12 — B moins cher.
- Année 5 : 17,50 contre $12 \times 1,338226 \approx 16,06$ — B encore moins cher.
- Année 9 : 19,50 contre $12 \times 1,689479 \approx 20,27$ — A devient moins cher.
- **Coût total sur 10 ans** (en mois, soit $\times 12$) :
- **A** : $12 \times (10 \times 15 + 0,5 \times 45) = 12 \times (150 + 22,5) = 12 \times 172,5 = 2070$ €.
- **B** : $12 \times 12 \times \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} = 144 \times \frac{0,790848}{0,06} \approx 144 \times 13,18079 \approx 1898,0$ €.
- **Conclusion** : l'offre **B** est moins chère sur 10 ans (1898 € contre 2070 €).
- **Contrôles** : $1,06^{10} \approx 1,790848$ ✓ ; $0 + 1 + \dots + 9 = 45$ ✓
- **Sur 20 ans** : A coûterait $12 \times (300 + 0,5 \times 190) = 12 \times 395 = 4740$ € ; B coûterait $144 \times \frac{1,06^{20} - 1}{0,06} \approx 144 \times 36,7856 \approx 5297,1$ € — cette fois **A** l'emporte ✓
- **Leçon** : l'exponentielle finit toujours par dépasser le linéaire, mais le **moment** du basculement dépend de l'horizon considéré.

Réponse. B sur 10 ans (1898 € contre 2070 €), mais A sur 20 ans.

Correction de l'exercice 7 - Suite et récurrence à deux termes

- **Calculs** :
- $u_2 = 6 - 2 = 4$;
- $u_3 = 12 - 4 = 8$;
- $u_4 = 24 - 8 = 16$;
- $u_5 = 48 - 16 = 32$.
- **Conjecture** : $u_n = 2^n$.
- **Vérification de la récurrence** : $3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n = 6 \times 2^n - 2 \times 2^n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ ✓
- **Vérification des conditions initiales** : $2^0 = 1$ ✓ et $2^1 = 2$ ✓
- **Conclusion** : la conjecture est démontrée — la suite est **géométrique** de raison 2.
- **Remarque** : ce n'était pas évident a priori ; une récurrence à deux termes donne en général une **combinaison** de deux suites géométriques.
- **Méthode générale** : on cherche les r tels que $r^2 = 3r - 2$, soit $r^2 - 3r + 2 = 0$ et $r \in \{1; 2\}$. La solution générale est $u_n = A + B \times 2^n$.
- **Détermination** : $A + B = 1$ et $A + 2B = 2$ donnent $B = 1$ et $A = 0$, d'où $u_n = 2^n$ ✓
- **Autre condition initiale** : avec $u_0 = 3$ et $u_1 = 4$, on aurait $A = 2$ et $B = 1$, soit $u_n = 2 + 2^n$.

Réponse. 4 ; 8 ; 16 ; 32 — et $u_n = 2^n$.

Correction de l'exercice 8 - Dose de médicament

- **Récurrence** : $q_0 = 200$ (juste après la première prise) et $q_{n+1} = 0,6q_n + 200$.
 - **Point fixe** : $0,6\ell + 200 = \ell$ donne $0,4\ell = 200$, donc $\ell = 500$ mg
 - **Suite auxiliaire** : $v_n = q_n - 500$, géométrique de raison 0,6 avec $v_0 = -300$.
 - **Forme explicite** :
- $$q_n = 500 - 300 \times 0,6^n$$
- **Limite** : $q_n \rightarrow 500$ mg — la quantité **se stabilise** ✓

- **Contrôles** : $q_0 = 200$ ✓ ; $q_1 = 500 - 180 = 320$, et directement $120 + 200 = 320$ ✓ ;
 $q_2 = 500 - 108 = 392$ ✓
 - **Valeurs** : $q_5 \approx 500 - 23,328 = 476,7$ mg ; $q_{10} \approx 498,2$ mg ✓
 - **Palier atteint à 1 % près** : $300 \times 0,6^n < 5$ donne $n > \frac{\ln(1/60)}{\ln 0,6} \approx 8,01$, soit 9 jours ✓
 - **Interprétation médicale** : c'est le **plateau thérapeutique**. Si la dose toxique était de 450 mg, ce traitement serait dangereux à partir du 4^e jour ($q_4 = 500 - 38,88 = 461,1$ mg) — d'où l'importance de calculer le plateau, et non la seule dose journalière.
 - **Contrôle du plateau** : à l'équilibre, l'élimination $0,4 \times 500 = 200$ mg compense exactement la prise ✓
- Réponse.** $q_n = 500 - 300 \times 0,6^n$, de limite 500 mg.

Correction de l'exercice 9 - Intérêts composés et temps de doublement

- **Condition** : $(1 + t)^{12} = 2$, donc
$$1 + t = 2^{1/12} \approx 1,059463$$
- **Taux** : environ 5,95 % par an.
- **Vérification** : $1,059463^{12} = 2$ ✓
- **Règle des 70** : elle prédit $\frac{70}{12} \approx 5,83$ % — très proche des 5,95 % exacts ✓
- **Écart** : 0,12 point, soit une erreur relative de 2 % — la règle est excellente pour un calcul mental.
- **Origine de la règle** : $\ln 2 \approx 0,693$, et pour t petit $\ln(1 + t) \approx t$, donc $n \approx \frac{0,693}{t} = \frac{69,3}{100t}$ ✓
- **Précision selon le taux** : la règle est très bonne pour t entre 2 % et 10 % ; à 20 %, elle prédit 3,5 ans contre 3,80 réels.
- **Autres cas** : doubler en 10 ans demande 7,18 % (règle : 7 %) ; en 20 ans, 3,53 % (règle : 3,5 %) ✓
- **Triplement** : $\frac{\ln 3}{\ln 1,059463} \approx 19,02$ ans — presque le double du temps de doublement, cohérent avec $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$.

Réponse. $t = 2^{1/12} - 1 \approx 5,95$ % (la règle des 70 donne 5,83 %).

Correction de l'exercice 10 - Somme des carrés

- **Première somme** :
$$\frac{20 \times 21 \times 41}{6} = \frac{17\,220}{6} = 2870$$
- **Somme jusqu'à 10** : $\frac{10 \times 11 \times 21}{6} = \frac{2310}{6} = 385$.
- **Différence** :
$$11^2 + \dots + 20^2 = 2870 - 385 = 2485$$
- **Contrôles partiels** : $121 + 144 + 169 = 434$, et $\frac{13 \times 14 \times 27}{6} - 385 = 819 - 385 = 434$ ✓
- **Contrôle de la formule** : pour $n = 3$, $\frac{3 \times 4 \times 7}{6} = 14 = 1 + 4 + 9$ ✓

- **Ordre de grandeur** : la somme des carrés jusqu'à n est de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ — ici $\frac{8000}{3} \approx 2667$, proche de 2870 ✓
- **Remarque** : la suite (n^2) n'est **ni** arithmétique **ni** géométrique, mais la suite de ses **différences** $(2n + 1)$ est arithmétique.
- **Somme des cubes** : $1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, soit $210^2 = 44\,100$ pour $n = 20$ ✓

Réponse. 2870 et 2485.

Correction de l'exercice 11 - Modèle de recyclage

- **Récurrence** : $S_{n+1} = 0,25S_n + 10\,000$ (il reste 25 % du stock, plus la production nouvelle), avec $S_0 = 10\,000$.
- **Point fixe** : $0,25\ell + 10\,000 = \ell$ donne $0,75\ell = 10\,000$, donc
$$\ell = \frac{40\,000}{3} \approx 13\,333,3 \text{ tonnes}$$
- **Suite auxiliaire** : $v_n = S_n - \frac{40\,000}{3}$, géométrique de raison 0,25 avec $v_0 = -\frac{10\,000}{3}$.
- **Forme explicite** :
$$S_n = \frac{40\,000}{3} - \frac{10\,000}{3} \times 0,25^n$$
- **Limite** : $S_n \rightarrow \frac{40\,000}{3} \approx 13\,333,3 \text{ tonnes}$ ✓
- **Contrôles** : $S_0 = \frac{40\,000 - 10\,000}{3} = 10\,000$ ✓ ;
 $S_1 = \frac{40\,000}{3} - \frac{2500}{3} = \frac{37\,500}{3} = 12\,500$, et directement $2500 + 10\,000 = 12\,500$ ✓
- **Convergence rapide** : $S_3 \approx 13\,281,3$ et $S_5 \approx 13\,330,1$ — le régime permanent est atteint en quatre ou cinq ans ✓
- **Vérification du plateau** : à l'équilibre, on recycle $0,75 \times 13\,333,3 = 10\,000$ tonnes, exactement la production ✓
- **Effet d'un meilleur recyclage** : à 90 %, le stock limite tomberait à $\frac{10\,000}{0,9} \approx 11\,111$ tonnes.

Réponse. $S_n = \frac{40\,000}{3}(1 - 0,25^n) + 10\,000 \times 0,25^n$, de limite $\frac{40\,000}{3} \approx 13\,333 \text{ t}$.

Correction de l'exercice 12 - Suite auxiliaire à trouver

- **Calcul** :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n}{2} + 1 - 2 = \frac{u_n}{2} - 1 = \frac{u_n - 2}{2} = \frac{v_n}{2}$$
- **Conclusion** : (v_n) est **géométrique** de raison $\frac{1}{2}$ ✓
- **Premier terme** : $v_0 = 5 - 2 = 3$, donc $v_n = 3 \times 0,5^n$.
- **Forme explicite** :
$$u_n = 2 + 3 \times 0,5^n$$
- **Contrôles** : $u_0 = 5$ ✓ ; $u_1 = 2 + 1,5 = 3,5$, et directement $2,5 + 1 = 3,5$ ✓ ;
 $u_2 = 2 + 0,75 = 2,75$ ✓
- **Limite** : $u_n \rightarrow 2$, le **point fixe** de la relation ✓
- **Vérification du point fixe** : $\frac{x}{2} + 1 = x$ donne $x = 2$ ✓

- **Décroissance** : (v_n) est positive décroissante, donc (u_n) décroît vers 2 en restant **au-dessus** ✓
- **Somme** : $u_0 + \dots + u_n = 2(n+1) + 3 \times \frac{1 - 0,5^{n+1}}{0,5} = 2(n+1) + 6(1 - 0,5^{n+1})$.
- **Contrôle pour** $n = 2$: $6 + 6(1 - 0,125) = 6 + 5,25 = 11,25$, et directement $5 + 3,5 + 2,75 = 11,25$ ✓

Réponse. $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$; $u_n = 2 + 3 \times 0,5^n$, de limite 2.

Correction de l'exercice 13 - Comparaison de plans de retraite

Plan A — somme géométrique (le premier versement fructifie 19 ans, le dernier 0 an) :

$$C_A = 3000 \times \frac{1,03^{20} - 1}{0,03} = 3000 \times \frac{0,806111}{0,03} \approx 3000 \times 26,87037 \approx 80\,611,1 \text{ €}$$

Plan B — intérêts composés sur la totalité :

$$C_B = 60\,000 \times 1,03^{20} \approx 60\,000 \times 1,806111 \approx 108\,366,7 \text{ €}$$

Comparaison.

- **B rapporte nettement plus** (108 367 € contre 80 611 €), pour la même mise totale de 60 000 €.
- **Raison** : dans le plan B, **tout** le capital fructifie pendant 20 ans ; dans le plan A, le versement moyen ne fructifie que 9,5 ans.
- **Contrôle** : $60\,000 \times 1,03^{9,5} \approx 79\,452 \text{ €}$, très proche des 80 611 € du plan A ✓
- **Intérêts** : 20 611 € pour A contre 48 367 € pour B ✓
- **Nuance pratique** : B exige de disposer de 60 000 € **immédiatement**, ce qui est rarement le cas — A est le plan réaliste.
- **Versement équivalent** : pour égaler B, il faudrait verser $\frac{108\,366,7}{26,87037} \approx 4032,9 \text{ €}$ par an dans le plan A ✓

Réponse. A : $\approx 80\,611 \text{ €}$ · B : $\approx 108\,367 \text{ €}$ — B gagne (tout fructifie 20 ans).

Correction de l'exercice 14 - Limite d'une suite auxiliaire

- **Point fixe** : $0,9\ell + 2 = \ell$ donne $0,1\ell = 2$, donc $\ell = 20$.
- **Suite auxiliaire** : $v_n = u_n - 20$, géométrique de raison 0,9 avec $v_0 = -10$.
- **Forme explicite** :

$$u_n = 20 - 10 \times 0,9^n$$

- **Limite** : $u_n \rightarrow 20$, par valeurs **inférieures** ✓
- **Contrôles** : $u_0 = 10$ ✓ ; $u_1 = 20 - 9 = 11$, et directement $9 + 2 = 11$ ✓ ; $u_2 = 20 - 8,1 = 11,9$ ✓
- **Seuil** : $20 - 10 \times 0,9^n > 19,9$ équivaut à $0,9^n < 0,01$, soit

$$n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9} \approx \frac{-4,6052}{-0,10536} \approx 43,71$$

- **Réponse** : $n = 44$.
- **Vérifications** : $u_{43} = 20 - 10 \times 0,9^{43} \approx 20 - 0,107753 = 19,8922 \leq 19,9$ ✓
- $u_{44} \approx 20 - 0,096977 = 19,9030 > 19,9$ ✓
- **Avertissement sur le seuil** : la suite est **majorée par 20**, donc un seuil de 20,1 ne serait **jamais** atteint et une boucle *while* tournerait indéfiniment ✓

Réponse. Limite 20 ; $u_n > 19,9$ à partir de $n = 44$.

Correction de l'exercice 15 - Suite et aire

— **Côtés** : $c_n = 0,8^n$, donc les **aires** valent $a_n = 0,64^n$ — géométrique de raison 0,64 ✓

— **Somme des 10 premières** :

$$S_9 = \frac{1 - 0,64^{10}}{1 - 0,64} = \frac{1 - 0,011529}{0,36} \approx \frac{0,988471}{0,36} \approx 2,74575$$

— **Somme infinie** :

$$S = \frac{1}{1 - 0,64} = \frac{1}{0,36} \approx 2,77778$$

— **Contrôle** : $S - S_9 = \frac{0,64^{10}}{0,36} \approx 0,032025$ ✓, et $2,74575 + 0,032025 \approx 2,77778$ ✓

— **Premières aires** : 1 ; 0,64 ; 0,4096 ; 0,262144 ; 0,16777 ✓

— **Sommes partielles** : 1 ; 1,64 ; 2,0496 ; 2,31174 ; 2,47952 — convergence vers 2,7778 ✓

— **Erreur à éviter** : la raison des **aires** est $0,8^2 = 0,64$, **pas** 0,8 — l'aire varie comme le **carré** du côté.

— **Somme des périmètres** : de raison 0,8, elle vaut $\frac{4}{1 - 0,8} = 20$ — bien plus grande relativement, car les périmètres décroissent plus lentement ✓

Réponse. $\approx 2,746$ pour 10 carrés ; $\frac{1}{0,36} \approx 2,778$ au total.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : location ou achat

a) **Valeur résiduelle** — suite géométrique de raison 0,85 :

$$V_5 = 30\,000 \times 0,85^5 \approx 30\,000 \times 0,443705 \approx 13\,311,2 \text{ €}$$

b) **Coût de la location** — somme géométrique de raison 1,04, 5 termes :

$$L = 6000 \times \frac{1,04^5 - 1}{0,04} = 6000 \times \frac{0,216653}{0,04} \approx 6000 \times 5,416323 \approx 32\,497,9 \text{ €}$$

c) **Comparaison.**

— **Achat** : on dépense 30 000 € et l'on récupère 13 311,2 € à la revente, soit un coût réel de

$$30\,000 - 13\,311,2 = 16\,688,8 \text{ €}$$

— **Location** : 32 497,9 €, sans aucune valeur résiduelle.

— **Conclusion** : l'**achat** est près de **deux fois** moins cher (16 689 € contre 32 498 €) ✓

— **Contrôles** : $0,85^5 \approx 0,443705$ ✓ ; les loyers successifs valent 6000 ; 6240 ; 6489,6 ; 6749,2 ; 7019,2 €, de somme 32 498 € ✓

— **Point d'équilibre** : la location deviendrait compétitive si le loyer initial tombait à $6000 \times \frac{16\,688,8}{32\,497,9} \approx 3081,2 \text{ €}$ — soit presque la moitié.

— **Sur 10 ans** : achat $30\,000 - 30\,000 \times 0,85^{10} \approx 30\,000 - 5906,2 = 24\,093,8 \text{ €}$ contre location $6000 \times \frac{1,04^{10} - 1}{0,04} \approx 72\,036,6 \text{ €}$ — l'écart se creuse encore ✓

— **Nuance** : ce calcul ignore le coût du capital immobilisé, la maintenance et les avantages fiscaux, qui peuvent inverser la conclusion dans un vrai dossier.

Réponse. a) $\approx 13\,311 \text{ €}$ · b) $\approx 32\,498 \text{ €}$ · c) achat 16 689 € contre location 32 498 € — l'achat gagne.