

Plaquette 4 - Variations, limites et algorithmes de seuil

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Étude du sens de variation.

- **Par la différence** : on calcule $u_{n+1} - u_n$ et l'on étudie son **signe**.
- **Par le quotient** (si tous les termes sont **strictement positifs**) : on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- **Par une fonction** : si $u_n = f(n)$, la suite a le même sens de variation que f sur $[0; +\infty[$.

Limites de référence.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \end{cases}$$

Pour $q \leq -1$, la suite (q^n) **n'a pas de limite** (elle oscille).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Suite arithmétique de raison r : limite $+\infty$ si $r > 0$, $-\infty$ si $r < 0$, constante si $r = 0$.

Suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$: limite $+\infty$ si $q > 1$, 0 si $0 < q < 1$.

Algorithme de seuil.

```
def seuil(u0, q, s):
    u = u0
    n = 0
    while u < s:
        u = q * u
        n = n + 1
    return n
```

Terminaison : la boucle s'arrête si la suite est **croissante de limite infinie** (ou décroissante vers une limite sous le seuil). Une suite bornée par le seuil boucle **indéfiniment** — il faut toujours justifier la terminaison.

Résolution exacte d'un seuil géométrique : $u_0 q^n > s$ donne $n > \frac{\ln(s/u_0)}{\ln q}$, avec **inversion du sens** si $\ln q < 0$.

Correction de l'exercice 1 - Sens de variation par différence

— Différence :

$$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 6(n+1) + 5] - [n^2 - 6n + 5]$$

— **Développement** : $n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 5 - n^2 + 6n - 5 = 2n - 5$.

— **Signe** : $2n - 5 < 0$ pour $n \leq 2$ et > 0 pour $n \geq 3$.

— **Conclusion** : la suite **décroît** de u_0 à u_3 , puis **croît** à partir de u_3 .

— **Valeurs** : $u_0 = 5$; $u_1 = 0$; $u_2 = -3$; $u_3 = -4$; $u_4 = -3$; $u_5 = 0$; $u_6 = 5$.

- **Minimum** : $u_3 = -4$ ✓
- **Contrôle par la fonction** : $f(x) = x^2 - 6x + 5$ a son sommet en $x = 3$, ce qui confirme le minimum en $n = 3$ ✓
- **Symétrie** : $u_{3+k} = u_{3-k}$ — on le vérifie avec $u_2 = u_4 = -3$ ✓
- **Limite** : $u_n \rightarrow +\infty$, la suite n'est **pas** monotone mais diverge bien vers $+\infty$.

Réponse. Décroissante jusqu'à $u_3 = -4$, puis croissante ; limite $+\infty$.

Correction de l'exercice 2 - Sens de variation par quotient

- **Positivité** : tous les termes sont strictement positifs, le quotient est donc utilisable.
- **Quotient** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = \frac{3(n+1)}{n+2}$$

- **Comparaison à 1** : $\frac{3n+3}{n+2} > 1$ équivaut à $3n+3 > n+2$, soit $2n > -1$ — **toujours vrai** pour $n \geq 0$ ✓
- **Conclusion** : la suite est **strictement croissante**.
- **Valeurs** : $u_0 = 1$; $u_1 = 1,5$; $u_2 = 3$; $u_3 = 6,75$; $u_4 = 16,2$ ✓
- **Contrôle du quotient** : $\frac{u_1}{u_0} = 1,5 = \frac{3 \times 1}{2}$ ✓ et $\frac{u_2}{u_1} = 2 = \frac{3 \times 2}{3}$ ✓
- **Limite** : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 3 > 1$, et l'exponentielle 3^n écrase le dénominateur linéaire : $u_n \rightarrow +\infty$ ✓
- **Contrôle** : $u_{10} = \frac{59\,049}{11} \approx 5368,1$, à comparer à $u_5 = \frac{243}{6} = 40,5$ ✓

Réponse. Strictement croissante ($\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)}{n+2} > 1$) ; limite $+\infty$.

Correction de l'exercice 3 - Limites de suites géométriques

- $u_n = 0,7^n$: $|q| < 1$, donc

$$\lim u_n = 0$$

- $v_n = 1,3^n$: $q > 1$, donc $\lim v_n = +\infty$.
- $w_n = (-0,4)^n$: $|q| = 0,4 < 1$, donc $\lim w_n = 0$ — la suite alterne mais son amplitude s'annule ✓
- $t_n = (-2)^n$: $|q| = 2 > 1$ et $q < 0$ — la suite **n'a pas de limite**, elle oscille avec une amplitude croissante.
- **Contrôles numériques** : $0,7^{20} \approx 7,98 \times 10^{-4}$ ✓ ; $1,3^{20} \approx 190,05$ ✓
- $(-0,4)^{10} \approx 1,0486 \times 10^{-4}$ et $(-0,4)^{11} \approx -4,194 \times 10^{-5}$ — l'alternance se voit, l'amplitude chute ✓
- $(-2)^{10} = 1024$ et $(-2)^{11} = -2048$ — divergence oscillante ✓
- **Règle à retenir** : seul $|q|$ décide de la **convergence** ; le **signe** de q décide de l'alternance.
- **Cas frontière** : $q = 1$ donne une suite constante égale à 1 ; $q = -1$ donne 1 ; -1 ; 1 ; -1 ; ... sans limite.

Réponse. 0 ; $+\infty$; 0 ; pas de limite.

Correction de l'exercice 4 - Algorithme de seuil croissant

- **Suite** : $u_n = 3 \times 1,5^n$, géométrique croissante.

— **Condition d'arrêt** : $3 \times 1,5^n \geq 1000$, soit $1,5^n \geq \frac{1000}{3} \approx 333,33$.

— **Logarithme** :

$$n \geq \frac{\ln 333,33}{\ln 1,5} \approx \frac{5,8091}{0,40546} \approx 14,327$$

— **Réponse** : le script affiche 15.

— **Vérifications** : $u_{14} = 3 \times 1,5^{14} \approx 875,79 < 1000$ (la boucle continue) ✓

— $u_{15} = 3 \times 1,5^{15} \approx 1313,7 \geq 1000$ ✓

— **Terminaison** : $q = 1,5 > 1$ donne $u_n \rightarrow +\infty$, donc la boucle s'arrête nécessairement ✓

— **Contre-exemple instructif** : avec $q = 0,9$, la suite décroîtrait vers 0 en restant toujours sous 1000 — la boucle ne s'arrêterait **jamais**.

— **Bon réflexe** : avant d'exécuter une boucle *while*, toujours vérifier qu'elle **peut** se terminer.

Réponse. 15 (avec $u_{15} \approx 1313,7$).

Correction de l'exercice 5 - Algorithme de seuil décroissant

Script.

```
u = 5.0
n = 0
while u >= 0.01:
    u = 0.8 * u
    n = n + 1
print(n)
```

— **Résolution exacte** : $5 \times 0,8^n < 0,01$ équivaut à $0,8^n < 0,002$.

— **Logarithme** (sens **inversé** car $\ln 0,8 < 0$) :

$$n > \frac{\ln 0,002}{\ln 0,8} \approx \frac{-6,2146}{-0,22314} \approx 27,851$$

— **Réponse** : $n = 28$.

— **Vérifications** : $u_{27} = 5 \times 0,8^{27} \approx 0,012089 \geq 0,01$ ✓ et $u_{28} \approx 0,0096714 < 0,01$ ✓

— **Terminaison** : $0 < q < 1$ donne $u_n \rightarrow 0$, donc la suite finit par passer sous **tout** seuil strictement positif ✓

— **Attention à la condition** : elle doit être $u \geq 0.01$ (on continue **tant que** le seuil n'est pas franchi), pas $u < 0.01$.

— **Contrôle de l'ordre de grandeur** : passer de 5 à 0,01 demande de diviser par 500, soit environ $\log_{1,25} 500 \approx 27,85$ étapes ✓

Réponse. $n = 28$ (avec $u_{28} \approx 0,00967$).

Correction de l'exercice 6 - Suite définie par une fonction

— **Fonction associée** : $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$, avec $ad - bc = 2 \times 3 - 1 \times 1 = 5 > 0$.

— **Conclusion** : f est **croissante** sur $] -3; +\infty[$, donc la suite est **croissante** ✓

— **Contrôle par la différence** :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{(2n+3)(n+3) - (2n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$$

— **Numérateur** : $2n^2 + 9n + 9 - (2n^2 + 9n + 4) = 5 > 0$ ✓

— **Limite** : en divisant par n ,

$$u_n = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$$

- **Valeurs** : $u_0 = \frac{1}{3} \approx 0,3333$; $u_1 = 0,75$; $u_5 = \frac{11}{8} = 1,375$; $u_{20} = \frac{41}{23} \approx 1,7826$;
 $u_{100} = \frac{201}{103} \approx 1,9515$ ✓
- **Croissance vers 2 sans l'atteindre** : la suite est **majorée** par 2 (car $\frac{2n+1}{n+3} < 2 \Leftrightarrow 2n+1 < 2n+6$, toujours vrai) ✓
- **Réécriture éclairante** : $u_n = 2 - \frac{5}{n+3}$, ce qui rend la croissance et la limite immédiates ✓

Réponse. Croissante ; limite 2 (avec $u_n = 2 - \frac{5}{n+3}$).

Correction de l'exercice 7 - Terminaison d'un algorithme

- **Suite construite** : $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, soit $u_n = 1 + H_n$ où H_n est la somme harmonique.
- **Question** : H_n dépasse-t-il 2 ?
- **Réponse** : **oui**, la somme harmonique **diverge** vers $+\infty$ (très lentement).
- **Conclusion** : le script **se termine** ✓
- **Calcul** : $H_1 = 1$; $H_2 = 1,5$; $H_3 \approx 1,8333$; $H_4 \approx 2,0833$.
- Donc $u_4 \approx 3,0833 \geq 3$, et le script affiche 4.
- **Contrôle** : $u_3 = 1 + 1,8333 = 2,8333 < 3$ (la boucle continue) ✓
- **Lenteur de la divergence** : $H_n \approx \ln n + 0,5772$. Pour atteindre $H_n = 10$, il faudrait $n \approx 12\,367$; pour $H_n = 20$, environ 272 millions ✓
- **Piège à connaître** : une suite croissante **majorée** ne dépasse jamais son majorant — la boucle ne s'arrêterait pas. Ici H_n n'est pas majorée, d'où la terminaison.
- **Cas de non-terminaison** : en remplaçant $\frac{1}{n+1}$ par $\frac{1}{(n+1)^2}$, la somme convergerait vers $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$, et u_n resterait sous 2,645 — boucle infinie.

Réponse. Oui : la somme harmonique diverge ; le script affiche 4.

Correction de l'exercice 8 - Limite d'une somme géométrique

- **Formule** :

$$S_n = \frac{1 - 0,6^{n+1}}{1 - 0,6} = \frac{1 - 0,6^{n+1}}{0,4} = 2,5(1 - 0,6^{n+1})$$

- **Limite** : $0,6^{n+1} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2,5$$

- **Contrôles** : $S_0 = 1$; $S_1 = 1,6$; $S_2 = 2,2$... vérifions :
 $2,5(1 - 0,216) = 2,5 \times 0,784 = 1,96$.
- **Calcul direct** : $1 + 0,6 + 0,36 = 1,96$ ✓ — c'est bien 1,96 et non 2,2.
- **Suite des sommes** : 1 ; 1,6 ; 1,96 ; 2,176 ; 2,3056 ; 2,3834 ; ... — croissance vers 2,5 ✓
- **Reste** : $2,5 - S_n = 2,5 \times 0,6^{n+1}$, qui décroît géométriquement.
- **Contrôle** : $2,5 - S_4 = 2,5 - 2,3056 = 0,1944$, et $2,5 \times 0,6^5 = 2,5 \times 0,07776 = 0,1944$ ✓

- **Rang pour approcher à 10^{-3}** : $2,5 \times 0,6^{n+1} < 10^{-3}$ donne
 $n + 1 > \frac{\ln(4 \times 10^{-4})}{\ln 0,6} \approx 15,33$, donc $n \geq 15$ ✓
- **Formule de la somme infinie** : $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{0,4} = 2,5$ ✓

Réponse. $S_n = 2,5(1 - 0,6^{n+1})$, de limite 2,5.

Correction de l'exercice 9 - Comparaison de vitesses de croissance

- **Limites** : toutes trois tendent vers $+\infty$.
- **Valeurs comparées** :

n	n^2	2^n	$100n$
5	25	32	500
10	100	1024	1000
20	400	1 048 576	2000
30	900	$\approx 1,07 \times 10^9$	3000

- **Classement final** : 2^n écrase n^2 , qui écrase $100n$ — mais seulement à partir d'un certain rang ✓
- **Croisements** :
- 2^n dépasse $100n$ dès $n = 10$ ($1024 > 1000$) ✓
- n^2 dépasse $100n$ pour $n > 100$ ✓
- 2^n dépasse n^2 dès $n = 5$ ($32 > 25$) ✓
- **Hiérarchie des croissances** : $\ln n \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll n!$ — l'**exponentielle** bat toute puissance.
- **Contrôle au rang 100** : $n^2 = 10\,000 = 100n$, exactement le croisement ✓
- **Application pratique** : en algorithmique, un algorithme en 2^n devient inutilisable dès $n \approx 40$ (10^{12} opérations), là où un algorithme en n^2 tient jusqu'à $n \approx 10^5$.

Réponse. Toutes tendent vers $+\infty$, mais $2^n \gg n^2 \gg 100n$ à partir d'un certain rang.

Correction de l'exercice 10 - Suite alternée bornée

- **Termes** : 1 ; -0,5 ; 0,3333 ; -0,25 ; 0,2 ; -0,1667 ; ...
- **Monotonie** : la suite **alterne** de signe, elle n'est donc **ni croissante ni décroissante** ✓
- **Limite** : $|u_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$
- **Justification** : $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, et les deux bornes tendent vers 0 — c'est le théorème des **gendarmes** ✓
- **Encadrement** : $|u_n| < 10^{-3}$ pour $n + 1 > 1000$, soit $n \geq 1000$ ✓
- **Contrôle** : $u_{1000} = \frac{1}{1001} \approx 9,99 \times 10^{-4}$ ✓
- **Sous-suites monotones** : les termes de rang **pair** (1 ; 0,3333 ; 0,2 ; ...) décroissent vers 0, ceux de rang **impair** (-0,5 ; -0,25 ; -0,1667 ; ...) croissent vers 0 ✓
- **Bornes** : $-0,5 \leq u_n \leq 1$ pour tout n — la suite est **bornée**, avec $u_0 = 1$ pour maximum et $u_1 = -0,5$ pour minimum.

— **À retenir** : une suite peut converger **sans** être monotone.

Réponse. Limite 0 ; suite alternée, donc non monotone.

Correction de l'exercice 11 - Seuil sur une suite arithmétique

Algorithme.

```
u = 7
n = 0
while u <= 10000:
    u = u + 13
    n = n + 1
print(n)
```

— **Résolution directe** : $u_n = 7 + 13n > 10\,000$ donne $13n > 9993$, soit

$$n > \frac{9993}{13} = 768,69$$

— **Réponse** : $n = 769$.

— **Vérifications** : $u_{768} = 7 + 9984 = 9991 \leq 10\,000$ ✓ et
 $u_{769} = 7 + 9997 = 10\,004 > 10\,000$ ✓

— **Avantage du calcul direct** : il est **immédiat**, alors que la boucle effectue 769 itérations.

— **Comparaison avec le cas géométrique** : pour une suite géométrique, le calcul direct passe par un **logarithme** ; pour une arithmétique, une simple **division** suffit.

— **Terminaison** : $r = 13 > 0$ garantit $u_n \rightarrow +\infty$, donc l'arrêt ✓

— **Somme jusqu'à ce rang** : $770 \times \frac{7 + 10\,004}{2} = 770 \times 5005,5 = 3\,854\,235$.

Réponse. $n = 769$ ($u_{769} = 10\,004$).

Correction de l'exercice 12 - Suite bornée et convergence

— **Croissance** :

$$u_{n+1} - u_n = \left(3 - \frac{2}{n+2}\right) - \left(3 - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

— **Signe** : $\frac{2}{n+1} > \frac{2}{n+2}$ car le dénominateur est plus petit, donc la différence est **positive** ✓

— **Calcul explicite** : $\frac{2(n+2) - 2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$ ✓

— **Majoration** : $\frac{2}{n+1} > 0$, donc $u_n = 3 - \frac{2}{n+1} < 3$ pour tout n ✓

— **Limite** : $\frac{2}{n+1} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

— **Valeurs** : $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_4 = 2,6$; $u_9 = 2,8$; $u_{99} = 2,98$ ✓

— **Rang pour approcher 3 à 10^{-2}** : $\frac{2}{n+1} < 0,01$ donne $n+1 > 200$, soit $n \geq 200$ ✓

— **Contrôle** : $u_{200} = 3 - \frac{2}{201} \approx 2,99005$ ✓

— **Théorème** : toute suite **croissante et majorée** converge — c'est le théorème de convergence monotone, et la limite est le plus petit majorant, ici exactement 3.

Réponse. Croissante ($\frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$), majorée par 3, de limite 3.

Correction de l'exercice 13 - Suite arithmético-géométrique

— **Calculs** : $u_1 = 4$; $u_2 = 5$; $u_3 = 5,5$; $u_4 = 5,75$; $u_5 = 5,875$; $u_6 = 5,9375$.

— **Conjecture** : la suite **croît** vers 6.

— **Point fixe** : on résout $0,5x + 3 = x$, soit $0,5x = 3$ et

$$x = 6$$

— **Démonstration** : posons $v_n = u_n - 6$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5(u_n - 6) = 0,5v_n$$

— (v_n) **est géométrique** de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = -4$, donc $v_n = -4 \times 0,5^n$
 et

$$u_n = 6 - 4 \times 0,5^n$$

— **Contrôles** : $u_0 = 6 - 4 = 2$ ✓ ; $u_3 = 6 - 0,5 = 5,5$ ✓ ; $u_6 = 6 - 0,0625 = 5,9375$ ✓

— **Limite** : $0,5^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 6$ ✓

— **Rang pour approcher 6 à 10^{-3}** : $4 \times 0,5^n < 10^{-3}$ donne $n > \frac{\ln(2,5 \times 10^{-4})}{\ln 0,5} \approx 11,97$,
 soit $n \geq 12$ ✓

— **Méthode générale** : pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, on retranche le point fixe $\frac{b}{1-a}$
 pour obtenir une suite **géométrique** de raison a .

Réponse. $u_n = 6 - 4 \times 0,5^n$, de limite 6.

Correction de l'exercice 14 - Comparaison de deux algorithmes

Calcul direct. $2 \times 1,05^n > 1000$ équivaut à $1,05^n > 500$, donc

$$n > \frac{\ln 500}{\ln 1,05} \approx \frac{6,2146}{0,048790} \approx 127,37$$

— **Réponse** : $n = 128$.

— **Vérifications** : $u_{127} = 2 \times 1,05^{127} \approx 981,91 < 1000$ ✓ et $u_{128} \approx 1031,0 > 1000$ ✓

Boucle while.

```
u = 2.0
n = 0
while u <= 1000:
    u = 1.05 * u
    n = n + 1
print(n)
```

— **Coût** : 128 multiplications.

Comparaison.

— Le calcul direct est en temps **constant** ; la boucle est en $O(n)$.

— **Précision** : la boucle accumule des erreurs d'arrondi flottant, négligeables ici mais réelles.

— **Avantage décisif de la boucle** : elle fonctionne pour **toute** suite définie par récurrence, y compris celles sans forme explicite (comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$).

— **Contrôle croisé** : les deux méthodes donnent bien 128 ✓

— **Bonne pratique** : utiliser le logarithme quand la forme explicite est connue, la boucle sinon — et **croiser** les deux quand c'est possible.

Réponse. $n = 128$ par les deux méthodes ; logarithme en temps constant, boucle en $O(n)$.

Correction de l'exercice 15 - Limite d'un quotient

- **Méthode** : on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

$$u_n = \frac{n^2 \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2} \right)} = \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}$$

- **Limites des termes** : $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, $\frac{5}{n^2} \rightarrow 0$.

- **Conclusion** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{1} = 3$$

- **Contrôles** : $u_1 = \frac{4}{6} \approx 0,6667$; $u_{10} = \frac{319}{105} \approx 3,0381$; $u_{100} = \frac{30199}{10005} \approx 3,0184$;
 $u_{1000} \approx 3,00195$ ✓

- **Approche par le dessus** : pour n assez grand, $u_n > 3$ — la convergence se fait « par valeurs supérieures ».

- **Vérification** : $u_n - 3 = \frac{3n^2 + 2n - 1 - 3n^2 - 15}{n^2 + 5} = \frac{2n - 16}{n^2 + 5}$, positif dès $n \geq 9$ ✓

- **Contrôle** : $u_8 = \frac{207}{69} = 3$ exactement, et $u_9 = \frac{260}{86} \approx 3,0233 > 3$ ✓

- **Règle générale** : pour un quotient de polynômes de **même degré**, la limite est le quotient des **coefficients dominants**.

Réponse. $\lim u_n = 3$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : population de poissons

- a) **Modèle** : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 1200$.

- $u_1 = 4000 + 1200 = 5200$;
 — $u_2 = 4160 + 1200 = 5360$;
 — $u_3 = 4288 + 1200 = 5488$.

- b) **Limite.** Le point fixe vérifie $0,8x + 1200 = x$, soit $0,2x = 1200$ et

$$x = 6000$$

- **Démonstration** : posons $v_n = u_n - 6000$. Alors $v_{n+1} = 0,8v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $0,8$ avec $v_0 = -1000$.

$$u_n = 6000 - 1000 \times 0,8^n$$

- **Contrôles** : $u_1 = 6000 - 800 = 5200$ ✓ ; $u_3 = 6000 - 512 = 5488$ ✓
 — **Limite** : $0,8^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 6000$ — la population se **stabilise** autour de 6000 poissons ✓

- c) **Algorithme.**

```
u = 5000.0
n = 0
while u <= 5900:
    u = 0.8 * u + 1200
    n = n + 1
print(n)
```

- **Résolution exacte** : $6000 - 1000 \times 0,8^n > 5900$ équivaut à $0,8^n < 0,1$, soit

$$n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 10,319$$

- **Réponse** : la 11^e année.
- **Vérifications** : $u_{10} = 6000 - 1000 \times 0,8^{10} \approx 6000 - 107,374 = 5892,6 \leq 5900$ ✓
- $u_{11} \approx 6000 - 85,899 = 5914,1 > 5900$ ✓
- **Terminaison** : la suite est croissante et de limite $6000 > 5900$, donc la boucle s'arrête ✓
- **Piège** : si le seuil valait 6100, la boucle **ne s'arrêterait jamais** — la suite est majorée par 6000. Il faut toujours comparer le seuil à la **limite**.

Réponse. a) 5200 ; 5360 ; 5488 · b) limite 6000 ($u_n = 6000 - 1000 \times 0,8^n$) · c) la 11^e année.