Plaquette 4 – Variations, limites et algorithmes de seuil

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Étude du sens de variation.

— **Par la différence** : on calcule $u_{n+1} - u_n$ et l'on étudie son **signe**.

— **Par le quotient** (si tous les termes sont **strictement positifs**) : on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

— **Par une fonction** : si $u_n = f(n)$, la suite a le même sens de variation que f sur $[0\,;+\infty[$.

Limites de référence.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \end{cases}$$

Pour $q \leq -1$, la suite (q^n) **n'a pas de limite** (elle oscille).

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Suite arithmétique de raison r : limite $+\infty$ si $r > 0$, $-\infty$ si $r < 0$, constante si $r = 0$.

Suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$: limite $+\infty$ si $q > 1$, 0 si $0 < q < 1$.

Algorithme de seuil.

```
def seuil(u0, q, s):
    u = u0
    n = 0
    while u < s:
        u = q * u
        n = n + 1
    return n
```

Terminaison : la boucle s'arrête si la suite est **croissante de limite infinie** (ou décroissante vers une limite sous le seuil). Une suite bornée par le seuil boucle **indéfiniment** — il faut toujours justifier la terminaison.

Résolution exacte d'un seuil géométrique : $u_0 q^n > s$ donne $n > \dfrac{\ln(s/u_0)}{\ln q}$, avec **inversion du sens** si $\ln q < 0$.

Correction de l'exercice 1 – Sens de variation par différence

— **Différence** :

$$u_{n+1} - u_n = \Big[(n+1)^2 - 6(n+1) + 5\Big] - \Big[n^2 - 6n + 5\Big]$$

— **Développement** : $n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 5 - n^2 + 6n - 5 = 2n - 5$.

— **Signe** : $2n - 5 < 0$ pour $n \leq 2$ et > 0 pour $n \geq 3$.

— **Conclusion** : la suite **décroît** de u_0 à u_3, puis **croît** à partir de u_3.

— **Valeurs** : $u_0 = 5$; $u_1 = 0$; $u_2 = -3$; $u_3 = -4$; $u_4 = -3$; $u_5 = 0$; $u_6 = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Minimum** : $u_3 = -4$ ✓
— **Contrôle par la fonction** : $f(x) = x^2 - 6x + 5$ a son sommet en $x = 3$, ce qui confirme le minimum en $n = 3$ ✓
— **Symétrie** : $u_{3+k} = u_{3-k}$ — on le vérifie avec $u_2 = u_4 = -3$ ✓
— **Limite** : $u_n \to +\infty$, la suite n'est **pas** monotone mais diverge bien vers $+\infty$.

Réponse. Décroissante jusqu'à $u_3 = -4$, puis croissante ; limite $+\infty$.

Correction de l'exercice 2 – Sens de variation par quotient

— **Positivité** : tous les termes sont strictement positifs, le quotient est donc utilisable.
— **Quotient** :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = \frac{3(n+1)}{n+2}$$

— **Comparaison à** 1 : $\frac{3n+3}{n+2} > 1$ équivaut à $3n + 3 > n + 2$, soit $2n > -1$ — **toujours vrai** pour $n \geq 0$ ✓
— **Conclusion** : la suite est **strictement croissante**.
— **Valeurs** : $u_0 = 1$; $u_1 = 1{,}5$; $u_2 = 3$; $u_3 = 6{,}75$; $u_4 = 16{,}2$ ✓
— **Contrôle du quotient** : $\frac{u_1}{u_0} = 1{,}5 = \frac{3 \times 1}{2}$ ✓ et $\frac{u_2}{u_1} = 2 = \frac{3 \times 2}{3}$ ✓
— **Limite** : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 3 > 1$, et l'exponentielle 3^n écrase le dénominateur linéaire : $u_n \to +\infty$ ✓
— **Contrôle** : $u_{10} = \frac{59\,049}{11} \approx 5368{,}1$, à comparer à $u_5 = \frac{243}{6} = 40{,}5$ ✓

Réponse. Strictement croissante ($\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)}{n+2} > 1$) ; limite $+\infty$.

Correction de l'exercice 3 – Limites de suites géométriques

— $u_n = 0{,}7^n$: $|q| < 1$, donc

$$\lim u_n = 0$$

— $v_n = 1{,}3^n$: $q > 1$, donc $\lim v_n = +\infty$.
— $w_n = (-0{,}4)^n$: $|q| = 0{,}4 < 1$, donc $\lim w_n = 0$ — la suite alterne mais son amplitude s'annule ✓
— $t_n = (-2)^n$: $|q| = 2 > 1$ et $q < 0$ — la suite **n'a pas de limite**, elle oscille avec une amplitude croissante.
— **Contrôles numériques** : $0{,}7^{20} \approx 7{,}98 \times 10^{-4}$ ✓ ; $1{,}3^{20} \approx 190{,}05$ ✓
— $(-0{,}4)^{10} \approx 1{,}0486 \times 10^{-4}$ et $(-0{,}4)^{11} \approx -4{,}194 \times 10^{-5}$ — l'alternance se voit, l'amplitude chute ✓
— $(-2)^{10} = 1024$ et $(-2)^{11} = -2048$ — divergence oscillante ✓
— **Règle à retenir** : seul $|q|$ décide de la **convergence** ; le **signe** de q décide de l'alternance.
— **Cas frontière** : $q = 1$ donne une suite constante égale à 1 ; $q = -1$ donne 1 ; −1 ; 1 ; −1 ; … sans limite.

Réponse. 0 ; $+\infty$; 0 ; pas de limite.

Correction de l'exercice 4 – Algorithme de seuil croissant

— **Suite** : $u_n = 3 \times 1{,}5^n$, géométrique croissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Condition d'arrêt** : $3 \times 1{,}5^n \geq 1000$, soit $1{,}5^n \geq \dfrac{1000}{3} \approx 333{,}33$.

— **Logarithme** :

$$n \geq \frac{\ln 333{,}33}{\ln 1{,}5} \approx \frac{5{,}8091}{0{,}40546} \approx 14{,}327$$

— **Réponse** : le script affiche 15.

— **Vérifications** : $u_{14} = 3 \times 1{,}5^{14} \approx 875{,}79 < 1000$ (la boucle continue) ✓

— $u_{15} = 3 \times 1{,}5^{15} \approx 1313{,}7 \geq 1000$ ✓

— **Terminaison** : $q = 1{,}5 > 1$ donne $u_n \to +\infty$, donc la boucle s'arrête nécessairement ✓

— **Contre-exemple instructif** : avec $q = 0{,}9$, la suite décroîtrait vers 0 en restant toujours sous 1000 — la boucle ne s'arrêterait **jamais**.

— **Bon réflexe** : avant d'exécuter une boucle *while*, toujours vérifier qu'elle **peut** se terminer.

Réponse. 15 (avec $u_{15} \approx 1313{,}7$).

Correction de l'exercice 5 – Algorithme de seuil décroissant

Script.

```
u = 5.0
n = 0
while u >= 0.01:
    u = 0.8 * u
    n = n + 1
print(n)
```

— **Résolution exacte** : $5 \times 0{,}8^n < 0{,}01$ équivaut à $0{,}8^n < 0{,}002$.

— **Logarithme** (sens **inversé** car $\ln 0{,}8 < 0$) :

$$n > \frac{\ln 0{,}002}{\ln 0{,}8} \approx \frac{-6{,}2146}{-0{,}22314} \approx 27{,}851$$

— **Réponse** : $n = 28$.

— **Vérifications** : $u_{27} = 5 \times 0{,}8^{27} \approx 0{,}012089 \geq 0{,}01$ ✓ et $u_{28} \approx 0{,}0096714 < 0{,}01$ ✓

— **Terminaison** : $0 < q < 1$ donne $u_n \to 0$, donc la suite finit par passer sous **tout** seuil strictement positif ✓

— **Attention à la condition** : elle doit être *u >= 0.01* (on continue **tant que** le seuil n'est pas franchi), pas *u < 0.01*.

— **Contrôle de l'ordre de grandeur** : passer de 5 à 0,01 demande de diviser par 500, soit environ $\log_{1{,}25} 500 \approx 27{,}85$ étapes ✓

Réponse. $n = 28$ (avec $u_{28} \approx 0{,}00967$).

Correction de l'exercice 6 – Suite définie par une fonction

Pour étudier le sens de variation, on calcule $u_{n+1} - u_n$ en réduisant au même dénominateur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{(2n+3)(n+3) - (2n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$$

Le numérateur vaut $2n^2 + 9n + 9 - \left(2n^2 + 9n + 4\right) = 5$, et le dénominateur est positif : $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite est **croissante**.

Pour la limite, on réécrit le terme : $u_n = \dfrac{2(n+3) - 5}{n+3} = 2 - \dfrac{5}{n+3}$. Quand n devient très

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

grand, $\frac{5}{n+3}$ devient aussi petit que l'on veut : u_n se rapproche de 2, en restant en dessous. Les valeurs le confirment : $u_0 \approx 0{,}33$, $u_5 = 1{,}375$, $u_{20} \approx 1{,}78$, $u_{100} \approx 1{,}95$.

La suite est **croissante** et sa limite vaut 2.

Réponse. Croissante ; limite 2 (avec $u_n = 2 - \frac{5}{n+3}$).

Correction de l'exercice 7 – Terminaison d'un algorithme

— **Suite construite** : $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, soit $u_n = 1 + H_n$ où H_n est la somme harmonique.
— **Question** : H_n dépasse-t-il 2 ?
— **Réponse** : **oui**, la somme harmonique **diverge** vers $+\infty$ (très lentement).
— **Conclusion** : le script **se termine** ✓
— **Calcul** : $H_1 = 1$; $H_2 = 1{,}5$; $H_3 \approx 1{,}8333$; $H_4 \approx 2{,}0833$.
— Donc $u_4 \approx 3{,}0833 \geq 3$, et le script affiche 4.
— **Contrôle** : $u_3 = 1 + 1{,}8333 = 2{,}8333 < 3$ (la boucle continue) ✓
— **Lenteur de la divergence** : $H_n \approx \ln n + 0{,}5772$. Pour atteindre $H_n = 10$, il faudrait $n \approx 12\,367$; pour $H_n = 20$, environ 272 millions ✓
— **Piège à connaître** : une suite croissante **majorée** ne dépasse jamais son majorant — la boucle ne s'arrêterait pas. Ici H_n n'est pas majorée, d'où la terminaison.
— **Cas de non-terminaison** : en remplaçant $\frac{1}{n+1}$ par $\frac{1}{(n+1)^2}$, la somme convergerait vers $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$, et u_n resterait sous 2,645 — boucle infinie.

Réponse. Oui : la somme harmonique diverge ; le script affiche 4.

Correction de l'exercice 8 – Limite d'une somme géométrique

— **Formule** :

$$S_n = \frac{1 - 0{,}6^{n+1}}{1 - 0{,}6} = \frac{1 - 0{,}6^{n+1}}{0{,}4} = 2{,}5\left(1 - 0{,}6^{n+1}\right)$$

— **Limite** : $0{,}6^{n+1} \to 0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 2{,}5$$

— **Contrôles** : $S_0 = 1$; $S_1 = 1{,}6$; $S_2 = 2{,}2$... vérifions : $2{,}5(1 - 0{,}216) = 2{,}5 \times 0{,}784 = 1{,}96$.
— **Calcul direct** : $1 + 0{,}6 + 0{,}36 = 1{,}96$ ✓ — c'est bien 1,96 et non 2,2.
— **Suite des sommes** : 1 ; 1,6 ; 1,96 ; 2,176 ; 2,3056 ; 2,3834 ; … — croissance vers 2,5 ✓
— **Reste** : $2{,}5 - S_n = 2{,}5 \times 0{,}6^{n+1}$, qui décroît géométriquement.
— **Contrôle** : $2{,}5 - S_4 = 2{,}5 - 2{,}3056 = 0{,}1944$, et $2{,}5 \times 0{,}6^5 = 2{,}5 \times 0{,}07776 = 0{,}1944$ ✓
— **Rang pour approcher à** 10^{-3} : $2{,}5 \times 0{,}6^{n+1} < 10^{-3}$ donne $n + 1 > \frac{\ln(4 \times 10^{-4})}{\ln 0{,}6} \approx 15{,}33$, donc $n \geq 15$ ✓
— **Formule de la somme infinie** : $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ ✓

Réponse. $S_n = 2{,}5\left(1 - 0{,}6^{n+1}\right)$, de limite 2,5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Comparaison de vitesses de croissance

— **Limites** : toutes trois tendent vers $+\infty$.
— **Valeurs comparées** :

$!\ n$	n^2	2^n	$100n$
5	25	32	500
10	100	1024	1000
20	400	1 048 576	2000
30	900	$\approx 1{,}07 \times 10^9$	3000

— **Classement final** : 2^n écrase n^2, qui écrase $100n$ — mais seulement **à partir d'un certain rang** ✓
— **Croisements** :
— 2^n dépasse $100n$ dès $n = 10$ ($1024 > 1000$) ✓
— n^2 dépasse $100n$ pour $n > 100$ ✓
— 2^n dépasse n^2 dès $n = 5$ ($32 > 25$) ✓
— **Hiérarchie des croissances** : $\ln n \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll n!$ — l'**exponentielle** bat toute puissance.
— **Contrôle au rang** 100 : $n^2 = 10\,000 = 100n$, exactement le croisement ✓
— **Application pratique** : en algorithmique, un algorithme en 2^n devient inutilisable dès $n \approx 40$ (10^{12} opérations), là où un algorithme en n^2 tient jusqu'à $n \approx 10^5$.

Réponse. Toutes tendent vers $+\infty$, mais $2^n \gg n^2 \gg 100n$ à partir d'un certain rang.

Correction de l'exercice 10 – Suite alternée bornée

— **Termes** : 1 ; $-0{,}5$; 0,3333 ; $-0{,}25$; 0,2 ; $-0{,}1667$; …
— **Monotonie** : la suite **alterne** de signe, elle n'est donc **ni croissante ni décroissante** ✓
— **Limite** : $|u_n| = \dfrac{1}{n+1} \to 0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

— **Justification** : $-\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, et les deux bornes tendent vers 0 — c'est le théorème des **gendarmes** ✓
— **Encadrement** : $|u_n| < 10^{-3}$ pour $n + 1 > 1000$, soit $n \geq 1000$ ✓
— **Contrôle** : $u_{1000} = \dfrac{1}{1001} \approx 9{,}99 \times 10^{-4}$ ✓
— **Sous-suites monotones** : les termes de rang **pair** (1 ; 0,3333 ; 0,2 ; …) décroissent vers 0, ceux de rang **impair** ($-0{,}5$; $-0{,}25$; $-0{,}1667$; …) croissent vers 0 ✓
— **Bornes** : $-0{,}5 \leq u_n \leq 1$ pour tout n — la suite est **bornée**, avec $u_0 = 1$ pour maximum et $u_1 = -0{,}5$ pour minimum.
— **À retenir** : une suite peut converger **sans** être monotone.

Réponse. Limite 0 ; suite alternée, donc non monotone.

Correction de l'exercice 11 – Seuil sur une suite arithmétique

Algorithme.

```
u = 7
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
n = 0
while u <= 10000:
    u = u + 13
    n = n + 1
print(n)
```

— **Résolution directe** : $u_n = 7 + 13n > 10\,000$ donne $13n > 9993$, soit

$$n > \frac{9993}{13} = 768{,}69$$

— **Réponse** : $n = 769$.

— **Vérifications** : $u_{768} = 7 + 9984 = 9991 \leq 10\,000$ ✓ et $u_{769} = 7 + 9997 = 10\,004 > 10\,000$ ✓

— **Avantage du calcul direct** : il est **immédiat**, alors que la boucle effectue 769 itérations.

— **Comparaison avec le cas géométrique** : pour une suite géométrique, le calcul direct passe par un **logarithme** ; pour une arithmétique, une simple **division** suffit.

— **Terminaison** : $r = 13 > 0$ garantit $u_n \to +\infty$, donc l'arrêt ✓

— **Somme jusqu'à ce rang** : $770 \times \dfrac{7 + 10\,004}{2} = 770 \times 5005{,}5 = 3\,854\,235$.

Réponse. $n = 769$ ($u_{769} = 10\,004$).

Correction de l'exercice 12 – Suite bornée et convergence

Croissance. On calcule la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+2) - 2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

Cette quantité est strictement positive : la suite est **croissante**.

Majoration. Pour tout n, $\dfrac{2}{n+1} > 0$, donc $u_n = 3 - \dfrac{2}{n+1} < 3$: la suite est **majorée par** 3.

Limite. Quand n devient très grand, $\dfrac{2}{n+1}$ devient aussi proche de 0 que l'on veut : u_n se rapproche de 3. Par exemple, $u_9 = 2{,}8$ et $u_{99} = 2{,}98$; pour que l'écart $\dfrac{2}{n+1}$ soit inférieur à 0,01, il suffit que $n + 1 > 200$.

La suite est croissante, majorée par 3, et sa limite vaut 3.

Réponse. Croissante ($\frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$), majorée par 3, de limite 3.

Correction de l'exercice 13 – Suite arithmético-géométrique

— **Calculs** : $u_1 = 4$; $u_2 = 5$; $u_3 = 5{,}5$; $u_4 = 5{,}75$; $u_5 = 5{,}875$; $u_6 = 5{,}9375$.

— **Conjecture** : la suite **croît** vers 6.

— **Point fixe** : on résout $0{,}5x + 3 = x$, soit $0{,}5x = 3$ et

$$x = 6$$

— **Démonstration** : posons $v_n = u_n - 6$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}5u_n + 3 - 6 = 0{,}5(u_n - 6) = 0{,}5v_n$$

— (v_n) **est géométrique** de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = -4$, donc $v_n = -4 \times 0{,}5^n$ et

$$u_n = 6 - 4 \times 0{,}5^n$$

— **Contrôles** : $u_0 = 6 - 4 = 2$ ✓ ; $u_3 = 6 - 0{,}5 = 5{,}5$ ✓ ; $u_6 = 6 - 0{,}0625 = 5{,}9375$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Limite** : $0{,}5^n \to 0$, donc $u_n \to 6$ ✓

— **Rang pour approcher** 6 **à** 10^{-3} : $4 \times 0{,}5^n < 10^{-3}$ donne $n > \dfrac{\ln(2{,}5 \times 10^{-4})}{\ln 0{,}5} \approx 11{,}97$, soit $n \geq 12$ ✓

— **Méthode générale** : pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, on retranche le point fixe $\dfrac{b}{1-a}$ pour obtenir une suite **géométrique** de raison a.

Réponse. $u_n = 6 - 4 \times 0{,}5^n$, de limite 6.

Correction de l'exercice 14 – Comparaison de deux algorithmes

Calcul direct. $2 \times 1{,}05^n > 1000$ équivaut à $1{,}05^n > 500$, donc

$$n > \frac{\ln 500}{\ln 1{,}05} \approx \frac{6{,}2146}{0{,}048790} \approx 127{,}37$$

— **Réponse** : $n = 128$.

— **Vérifications** : $u_{127} = 2 \times 1{,}05^{127} \approx 981{,}91 < 1000$ ✓ et $u_{128} \approx 1031{,}0 > 1000$ ✓

Boucle while.

```
u = 2.0
```

```
n = 0
while u <= 1000:
    u = 1.05 * u
    n = n + 1
print(n)
```

— **Coût** : 128 multiplications.

Comparaison.

— Le calcul direct est en temps **constant** ; la boucle est en $O(n)$.

— **Précision** : la boucle accumule des erreurs d'arrondi flottant, négligeables ici mais réelles.

— **Avantage décisif de la boucle** : elle fonctionne pour **toute** suite définie par récurrence, y compris celles sans forme explicite (comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$).

— **Contrôle croisé** : les deux méthodes donnent bien 128 ✓

— **Bonne pratique** : utiliser le logarithme quand la forme explicite est connue, la boucle sinon — et **croiser** les deux quand c'est possible.

Réponse. $n = 128$ par les deux méthodes ; logarithme en temps constant, boucle en $O(n)$.

Correction de l'exercice 15 – Limite d'un quotient

— **Méthode** : on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

$$u_n = \frac{n^2\left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}$$

— **Limites des termes** : $\dfrac{2}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{n^2} \to 0$, $\dfrac{5}{n^2} \to 0$.

— **Conclusion** :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{1} = 3$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôles** : $u_1 = \dfrac{4}{6} \approx 0{,}6667$; $u_{10} = \dfrac{319}{105} \approx 3{,}0381$; $u_{100} = \dfrac{30\,199}{10\,005} \approx 3{,}0184$; $u_{1000} \approx 3{,}00195$ ✓

— **Approche par le dessus** : pour n assez grand, $u_n > 3$ — la convergence se fait « par valeurs supérieures ».

— **Vérification** : $u_n - 3 = \dfrac{3n^2 + 2n - 1 - 3n^2 - 15}{n^2 + 5} = \dfrac{2n - 16}{n^2 + 5}$, positif dès $n \geq 9$ ✓

— **Contrôle** : $u_8 = \dfrac{207}{69} = 3$ exactement, et $u_9 = \dfrac{260}{86} \approx 3{,}0233 > 3$ ✓

— **Règle générale** : pour un quotient de polynômes de **même degré**, la limite est le quotient des **coefficients dominants**.

Réponse. $\lim u_n = 3$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : population de poissons

a) **Modèle** : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1200$.

— $u_1 = 4000 + 1200 = 5200$;

— $u_2 = 4160 + 1200 = 5360$;

— $u_3 = 4288 + 1200 = 5488$.

b) **Limite.** Le point fixe vérifie $0{,}8x + 1200 = x$, soit $0{,}2x = 1200$ et

$$x = 6000$$

— **Démonstration** : posons $v_n = u_n - 6000$. Alors $v_{n+1} = 0{,}8v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison 0,8 avec $v_0 = -1000$.

$$u_n = 6000 - 1000 \times 0{,}8^n$$

— **Contrôles** : $u_1 = 6000 - 800 = 5200$ ✓ ; $u_3 = 6000 - 512 = 5488$ ✓

— **Limite** : $0{,}8^n \to 0$, donc $u_n \to 6000$ — la population se **stabilise** autour de 6000 poissons ✓

c) **Algorithme.**

```
u = 5000.0
```

```
n = 0
while u <= 5900:
    u = 0.8 * u + 1200
    n = n + 1
print(n)
```

— **Résolution exacte** : $6000 - 1000 \times 0{,}8^n > 5900$ équivaut à $0{,}8^n < 0{,}1$, soit

$$n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}319$$

— **Réponse** : la 11^{e} année.

— **Vérifications** : $u_{10} = 6000 - 1000 \times 0{,}8^{10} \approx 6000 - 107{,}374 = 5892{,}6 \leq 5900$ ✓

— $u_{11} \approx 6000 - 85{,}899 = 5914{,}1 > 5900$ ✓

— **Terminaison** : la suite est croissante et de limite $6000 > 5900$, donc la boucle s’arrête ✓

— **Piège** : si le seuil valait 6100, la boucle **ne s’arrêterait jamais** — la suite est majorée par 6000. Il faut toujours comparer le seuil à la **limite**.

Réponse. a) 5200 ; 5360 ; 5488 · b) limite 6000 ($u_n = 6000 - 1000 \times 0{,}8^n$) · c) la 11^{e} année.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).