Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modèles économiques, suites auxiliaires et sommes

Suites arithmétiques et géométriques — Première spé maths

Exercices

Méthode

On modélise un problème concret, on introduit une **suite auxiliaire** pour ramener une récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ à une suite **géométrique**, puis on calcule **limites** et **sommes**.

Exercice 1 – Suite auxiliaire

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Déterminer u_n en fonction de n et la limite.

Exercice 2 – Épargne avec versements annuels

On place 2000 € à 4 % et l'on ajoute 500 € chaque année. Déterminer le capital C_n après n années et sa valeur au bout de 15 ans.

Exercice 3 – Remboursement de prêt

On emprunte 20 000 € à 0,4 % par mois et l'on rembourse 400 € par mois. Déterminer le capital restant C_n et le nombre de mensualités.

Exercice 4 – Population avec migration

Une ville perd 3 % de sa population par an mais accueille 1500 nouveaux habitants. Elle compte 80 000 habitants. Déterminer la population limite.

Exercice 5 – Somme mixte

Soit $u_n = 3 + 2 \times 0{,}5^n$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

Exercice 6 – Deux modèles d'abonnement

Offre A : 15 € par mois, augmentant de 0,50 € chaque année. Offre B : 12 € par mois, augmentant de 6 % par an. Quelle offre est la moins chère sur 10 ans ?

Exercice 7 – Suite et récurrence à deux termes

Soit $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Calculer u_2 à u_5 et conjecturer une forme explicite.

Exercice 8 – Dose de médicament

Un patient prend 200 mg d'un médicament par jour ; l'organisme en élimine 40 % chaque jour. Déterminer la quantité présente après n jours et sa limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Intérêts composés et temps de doublement

À quel taux annuel un capital double-t-il en 12 ans ? Comparer à la règle des 70.

Exercice 10 – Somme des carrés

Sachant que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculer $1^2 + \cdots + 20^2$ puis $11^2 + \cdots + 20^2$.

Exercice 11 – Modèle de recyclage

Une entreprise produit 10 000 tonnes de déchets par an et recycle 75 % du stock existant chaque année. Déterminer le stock limite.

Exercice 12 – Suite auxiliaire à trouver

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$. Montrer que $v_n = u_n - 2$ est géométrique et en déduire u_n.

Exercice 13 – Comparaison de plans de retraite

Plan A : verser 3000 € par an pendant 20 ans à 3 %. Plan B : verser 60 000 € en une fois à 3 % pendant 20 ans. Comparer les capitaux finaux.

Exercice 14 – Limite d'une suite auxiliaire

Soit $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 2$. Déterminer la limite, puis le rang à partir duquel $u_n > 19{,}9$.

Exercice 15 – Suite et aire

On part d'un carré de côté 1. À chaque étape, on construit un carré dont le côté vaut 0,8 fois le précédent. Calculer l'aire totale des 10 premiers carrés, puis la somme de toutes les aires.

Exercice 16 – Synthèse : location ou achat

Un équipement coûte 30 000 € à l'achat et perd 15 % de valeur par an. La location coûte 6000 € la première année, puis augmente de 4 % par an.

a) Quelle est la valeur résiduelle de l'équipement après 5 ans ?

b) Quel est le coût total de 5 ans de location ?

c) Comparer le coût réel de l'achat et de la location sur 5 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).