MATHÉMATIQUES

Suites arithmétiques et géométriques

Première spé maths

Suite numérique • Formule explicite • Récurrence • Suite arithmétique • Suite géométrique
Terme général • Somme de termes • Sens de variation • Limite (intuition) • Modèle discret

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de première générale** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Algèbre », section « Suites numériques, modèles discrets ». Il couvre :

- modes de génération : explicite, récurrence, algorithme, motifs géométriques ; notations $u(n)$, u_n, (u_n) ;
- suites arithmétiques : définition, terme général, lien avec les fonctions affines, $1+2+\cdots+n$ (démontré) ;
- suites géométriques : définition, terme général, lien avec la fonction exponentielle, $1+q+\cdots+q^n$ (démontré) ;
- sens de variation d'une suite ; introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, ou de son absence ;
- modélisation d'évolutions à accroissements constants ou à taux constant ; algorithmes (termes, sommes, seuils).

Objectif : générer et représenter une suite, étudier les suites arithmétiques et géométriques (terme général, sommes, variations), modéliser des évolutions discrètes et conjecturer une limite.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Générer une suite **3**

2 Suites arithmétiques **3**

3 Suites géométriques **4**

4 Sens de variation **4**

5 Limite : une première approche **4**

6 Erreurs classiques **5**

7 Fiche de synthèse **5**

8 Exercices d'application **5**

9 Corrigés des exercices **6**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Générer une suite

Suite numérique

Une **suite** (u_n) associe à chaque entier naturel n un réel u_n (noté aussi $u(n)$), le terme de rang n.

- **Formule explicite** : $u_n = f(n)$, par exemple $u_n = n^2 + 1$.
- **Récurrence** : u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$, par exemple $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 20$: $u_1 = 110$, $u_2 = 119$, $u_3 = 127{,}1$.
- Par un **algorithme**, ou par un **motif géométrique** (nombre d'allumettes, de carreaux à l'étape n).

Représentation graphique

On représente une suite par le nuage des points $(n\,;u_n)$; on ne relie pas les points.

2. Suites arithmétiques

Suite arithmétique

(u_n) est arithmétique de raison r si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$: on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours r. Elle modélise une évolution à **accroissements constants**.

Terme général

$\boxed{u_n = u_0 + nr}$ et, plus généralement, $u_n = u_p + (n-p)r$. Les points $(n\,;u_n)$ sont alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$: c'est la version discrète d'une fonction affine.

Démonstration. On ajoute r à chaque étape : $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_0 + 2r$, … Après n étapes, on a ajouté n fois r : $u_n = u_0 + nr$.

Somme des premiers entiers

$$\boxed{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Démonstration. On écrit $S = 1 + 2 + \cdots + n$ et $S = n + (n-1) + \cdots + 1$. En additionnant terme à terme : $2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$.

$1+2+\cdots+100 = \frac{100\times 101}{2} = 5\,050$. Pour une suite arithmétique, $u_0+u_1+\cdots+u_n = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$ (nombre de termes $\times$ moyenne du premier et du dernier).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Suites géométriques

Suite géométrique

(u_n) est géométrique de raison q si, pour tout n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Elle modélise une évolution à **taux constant** : une hausse de $t\,\%$ par période correspond à $q = 1 + \frac{t}{100}$.

Terme général

$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$ et $u_n = u_p \times q^{n-p}$. C'est la version discrète des fonctions exponentielles, étudiées plus loin.

Somme des puissances

Pour $q \neq 1$:

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Démonstration. Soit $S = 1 + q + \cdots + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$, et $S - qS = 1 - q^{n+1}$ (les termes intermédiaires s'éliminent). Donc $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$ et, comme $q \neq 1$, on divise par $1 - q$.

$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2\,047$. Un capital de 1 000 € placé à 3 % : $C_n = 1\,000 \times 1{,}03^n$.

4. Sens de variation

Étudier le sens de variation

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: positif pour tout n, la suite est croissante ; négatif, décroissante. Pour une suite à termes strictement positifs, on peut aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

- Arithmétique : croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.
- Géométrique avec $u_0 > 0$: croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.

5. Limite : une première approche

Idée de limite

Sur des exemples, en calculant beaucoup de termes, on observe le comportement de u_n quand n devient grand :

- $u_n = \frac{1}{n}$: 1 ; 0,1 ; 0,01… les termes se rapprochent de 0 : la suite semble avoir pour **limite** 0.
- $u_n = 2^n$: les termes deviennent aussi grands que l'on veut : limite infinie.
- $u_n = (-1)^n$: 1, −1, 1, −1… la suite n'a pas de limite.
- $u_0 = 100$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 20$: 100 ; 110 ; 119 ; 127,1 ; 134,4 ; … ; $u_{29} \approx 195{,}3$: on conjecture que la suite se rapproche de 200.

Aucune définition formelle n'est attendue : on conjecture à l'aide de calculs, d'un tableur ou

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'un algorithme de seuil.

Algorithme de seuil

```
def seuil(s):
    n, u = 0, 100
    while u < s:
        u = 0.9 * u + 20
        n = n + 1
    return n
```

`seuil(199)` renvoie le premier rang où $u_n \geq 199$; en diminuant l'écart à 200, le rang augmente : les termes s'approchent de 200 sans l'atteindre.

6. Erreurs classiques

À éviter

- Se tromper sur le nombre de termes : de u_0 à u_n, il y en a $n+1$.
- Confondre raison arithmétique (on ajoute) et géométrique (on multiplie) ; pour $+3\,\%$, $q = 1{,}03$, pas $0{,}03$.
- Conclure à une limite à partir de quelques termes seulement.
- Relier les points du nuage d'une suite.

7. Fiche de synthèse

Génération	explicite $u_n = f(n)$; récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
Arithmétique	$u_n = u_0 + nr$; $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Géométrique	$u_n = u_0 q^n$; $1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Variation	signe de $u_{n+1} - u_n$
Limite	conjecturer par le calcul : finie, infinie ou absente

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Arithmétique

(u_n) est arithmétique, $u_3 = 11$ et $u_8 = 26$. Déterminer la raison et u_0, puis $u_0 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 2 – Géométrique

Une population de 3 000 bactéries augmente de $50\,\%$ par heure. Exprimer v_n, puis calculer v_5.

Exercice 3 – Limite

Conjecturer la limite éventuelle de $u_n = 3 + \frac{2}{n+1}$ et de $v_n = 0{,}5^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $u_8 - u_3 = 5r = 15$, donc $r = 3$; $u_0 = u_3 - 3r = 2$. $u_{20} = 62$; somme de 21 termes : $21 \times \dfrac{2+62}{2} = 672$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $v_n = 3\,000 \times 1{,}5^n$; $v_5 = 3\,000 \times 7{,}593\,75 \approx 22\,781$ bactéries.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $\frac{2}{n+1}$ se rapproche de 0 : u_n semble tendre vers 3. $0{,}5^n$: 1 ; 0,5 ; 0,25… semble tendre vers 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).