

Plaquette 1 - Cercle trigonométrique

Trigonométrie — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Radians et degrés. Un tour complet vaut $360^\circ = 2\pi$ radians, donc

$$\text{degrés} = \text{radians} \times \frac{180}{\pi} \quad \text{radians} = \text{degrés} \times \frac{\pi}{180}$$

Cercle trigonométrique : cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens **inverse** des aiguilles d'une montre (sens direct).

Point image. Au réel x correspond le point M du cercle tel que l'arc $\widehat{IM}$ mesure x . Alors

$$M(\cos x; \sin x)$$

Deux réels ont le même point image si et seulement si leur différence est un multiple de 2π :

$$x' = x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Mesure principale : l'unique mesure appartenant à $] -\pi; \pi]$. On l'obtient en ajoutant ou retranchant des tours entiers.

Encadrements et signes.

Quadrant	$]0; \frac{\pi}{2}[$	$]\frac{\pi}{2}; \pi[$	$]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$	$]-\frac{\pi}{2}; 0[$
Signe de $\cos x$	+	-	-	+
Signe de $\sin x$	+	+	-	-

Relation fondamentale et encadrements, vrais pour tout réel x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

Longueur d'un arc de rayon R intercepté par un angle de α radians : $\ell = R\alpha$.

Correction de l'exercice 1 - Des degrés aux radians

On utilise la proportionnalité entre degrés et radians :

$$\text{radians} = \text{degrés} \times \frac{\pi}{180}$$

$$\text{a) } 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{b) } 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ (on simplifie par 45).}$$

$$\text{c) } 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ (on simplifie par 30).}$$

$$\text{d) } 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}.$$

Contrôle de bon sens. π radians valent 180° : une valeur inférieure à π correspond donc à un angle aigu ou obtus, et $\frac{7\pi}{6} > \pi$ correspond bien à un angle supérieur à l'angle plat.

Réponse. a) $\frac{\pi}{3}$ — b) $\frac{3\pi}{4}$ — c) $\frac{7\pi}{6}$ — d) $\frac{\pi}{12}$.

Correction de l'exercice 2 - Des radians aux degrés

On utilise la conversion inverse :

$$\text{degrés} = \text{radians} \times \frac{180}{\pi}$$

$$\text{a) } \frac{\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = \frac{180}{5} = 36^\circ.$$

$$\text{b) } \frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 5 \times 30 = 150^\circ.$$

$$\text{c) } \frac{7\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 7 \times 45 = 315^\circ.$$

$$\text{d) } \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 2 \times 60 = 120^\circ.$$

Astuce de calcul. Le π se simplifie toujours : il suffit de multiplier la fraction restante par 180. Et les valeurs repères s'apprennent : $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Réponse. a) 36° — b) 150° — c) 315° — d) 120° .

Correction de l'exercice 3 - Placer des points images

On part de $I(1; 0)$ et on tourne dans le **sens direct** (inverse des aiguilles d'une montre) pour un réel positif, dans l'autre sens pour un réel négatif.

a) $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$: le point A est au milieu du premier quadrant.

b) $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$: le point B est dans le **deuxième** quadrant, à 30° au-dessus de l'axe horizontal négatif.

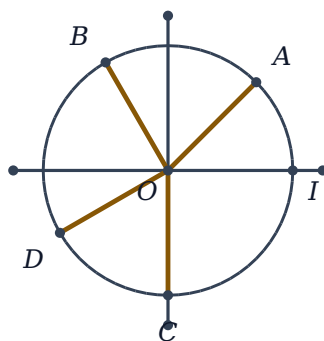
c) $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$: on tourne d'un quart de tour **vers le bas**, le point C est en bas du cercle.

d) $\frac{7\pi}{6} = 210^\circ$: un demi-tour (180°) puis 30° de plus, le point D est dans le **troisième** quadrant.

Contrôle par les coordonnées : $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C(0; -1)$ et $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$:

les signes correspondent bien aux quadrants annoncés.

Réponse. A : premier quadrant — B : deuxième — C : bas du cercle — D : troisième.



A en $\frac{\pi}{4}$, B en $\frac{2\pi}{3}$, C en $-\frac{\pi}{2}$, D en $\frac{7\pi}{6}$

Correction de l'exercice 4 - Trouver la mesure principale

La mesure principale est l'unique mesure appartenant à $]-\pi; \pi]$: on ajoute ou on retranche des tours entiers, c'est-à-dire des multiples de 2π .

a) $\frac{15\pi}{4} - 2\pi = \frac{15\pi - 8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$, qui dépasse encore π . On retranche encore 2π :

$$\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$$

b) $\frac{29\pi}{6} - 2\pi = \frac{29\pi - 12\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$, puis $\frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{5\pi}{6}$, qui appartient à $] -\pi ; \pi]$.

c) $-\frac{17\pi}{3} + 2\pi = -\frac{11\pi}{3}$, puis $+2\pi$ donne $-\frac{5\pi}{3}$, puis $+2\pi$ donne $\frac{\pi}{3}$.

Méthode rapide. On divise le coefficient par le dénominateur : pour $\frac{29\pi}{6}$, on cherche le multiple de 12 (car $2\pi = \frac{12\pi}{6}$) le plus proche : $29 - 24 = 5$, d'où $\frac{5\pi}{6}$ directement.

Réponse. a) $-\frac{\pi}{4}$ — b) $\frac{5\pi}{6}$ — c) $\frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 5 - Même point image ?

Deux réels ont le même point image si et seulement si leur différence est un **multiple de 2π** :

$$x' - x = 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

a) $\frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$: c'est bien un tour complet, les points images **coïncident**.

b) $\frac{5\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$: même point image.

c) $\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, qui n'est pas un multiple de 2π : les points sont **différents**.

Ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Contrôle par les coordonnées du c) : le premier point est $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, le second $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: même cosinus, sinus opposés.

Réponse. a) oui — b) oui — c) non (symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

Correction de l'exercice 6 - La longueur de l'arc

La longueur d'un arc s'obtient en multipliant le rayon par l'angle **exprimé en radians** :

$$\ell = R \times \alpha$$

— **Application** : $\ell = 5 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ cm.

— **Valeur approchée** : $\frac{10\pi}{3} \approx 10,47$ cm.

— **Longueur totale du cercle** : $2\pi R = 10\pi \approx 31,42$ cm.

— **Comparaison** : $\frac{\ell}{2\pi R} = \frac{\frac{10\pi}{3}}{10\pi} = \frac{1}{3}$.

L'arc représente exactement **un tiers** du cercle, ce qui est cohérent : $\frac{2\pi}{3}$ est le tiers de 2π .

Pourquoi la formule est si simple. C'est précisément la définition du radian : l'angle qui intercepte un arc **de longueur égale au rayon** mesure 1 radian.

Réponse. $\ell = \frac{10\pi}{3} \approx 10,47$ cm, soit un tiers du cercle.

Correction de l'exercice 7 - Lire un cosinus et un sinus

a) Par définition, le point image de x a pour coordonnées :

$$M(\cos x; \sin x)$$

— La projection de M sur l'axe des abscisses se lit en $-\frac{1}{2}$, celle sur l'axe des ordonnées en $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

— **Cohérence avec le quadrant** : M est dans le deuxième quadrant, donc le cosinus est négatif et le sinus positif ✓

— b) On calcule :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

— La relation fondamentale est vérifiée. Géométriquement, elle exprime simplement que $OM = 1$: c'est le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle formé par O , M et la projection de M sur l'axe des abscisses.

Réponse. a) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Le signe selon le quadrant

On situe d'abord le point image, puis on lit les signes dans le quadrant correspondant.

a) $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$: deuxième quadrant (entre $\frac{\pi}{2}$ et π), donc

$$\cos \frac{5\pi}{6} < 0 \quad \sin \frac{5\pi}{6} > 0$$

b) $-\frac{2\pi}{3} = -120^\circ$: on tourne vers le bas, le point est dans le troisième quadrant. Cosinus et sinus sont **tous deux négatifs**.

c) $\frac{7\pi}{4} = 315^\circ$: quatrième quadrant, donc $\cos > 0$ et $\sin < 0$.

Contrôle par les valeurs exactes : $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

Le réflexe. Le cosinus est une **abscisse** : il est positif à droite de l'axe vertical. Le sinus est une **ordonnée** : il est positif au-dessus de l'axe horizontal.

Réponse. a) $\cos < 0$, $\sin > 0$ — b) les deux négatifs — c) $\cos > 0$, $\sin < 0$.

Correction de l'exercice 9 - Angles opposés

a) Parcourir $-x$ revient à tourner du **même angle dans l'autre sens** : M' est le symétrique de M par rapport à l'**axe des abscisses**.

b) Une symétrie par rapport à l'axe des abscisses conserve l'abscisse et change le signe de l'ordonnée. Comme $M(\cos x; \sin x)$ et $M'(\cos(-x); \sin(-x))$:

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x$$

Vérification numérique avec $x = \frac{\pi}{3}$:

— $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ✓

$$- \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$$

Vocabulaire. On dit que le cosinus est une fonction **paire** et le sinus une fonction **impaire** : ces deux égalités sont à connaître par cœur.

Réponse. a) la symétrie d'axe (OI) — b) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Correction de l'exercice 10 - Angles supplémentaires

a) Les deux points sont à la **même hauteur**, de part et d'autre de l'axe vertical : P est le symétrique de M par rapport à l'**axe des ordonnées**.

b) Cette symétrie change le signe de l'abscisse et conserve l'ordonnée :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

— **Application** : $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

— De même, $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Contrôle par la figure : M et P ont pour ordonnée commune 0,5, et des abscisses opposées $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0,87 \checkmark$

Utilité. Cette relation ramène le calcul d'un cosinus du deuxième quadrant à une valeur remarquable du premier.

Réponse. a) la symétrie d'axe (OJ) — b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, d'où $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver un sinus

On utilise la **relation fondamentale** :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

— On isole $\sin^2 x$:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

— Donc $\sin x = \frac{4}{5}$ ou $\sin x = -\frac{4}{5}$.

— **On tranche avec l'intervalle** : $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ correspond au premier quadrant, où le sinus est **positif**.

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

L'étape indispensable. La relation fondamentale donne toujours **deux** valeurs possibles : c'est l'intervalle fourni par l'énoncé qui permet de choisir. L'oublier coûte la moitié des points.

— **Contrôle** : $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1 \checkmark$

Réponse. $\sin x = \frac{4}{5}$.

Correction de l'exercice 12 - Reconnaître un point image

Par définition du point image :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- **Quadrant** : le cosinus est négatif et le sinus positif, donc le point est dans le **deuxième quadrant**, soit $x \in \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[$.
- **Valeur remarquable** : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond à l'angle $\frac{\pi}{4}$ (45°). Dans le deuxième quadrant, l'angle qui convient est le supplémentaire :

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

- **Vérification** : $\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark$ et $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark$

Contrôle supplémentaire : $OM^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, le point est bien sur le cercle.

Réponse. $x = \frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 13 - Un réel quelconque

On retranche des tours entiers, avec $2\pi \approx 6,28$.

- **Premier retrait** : $10 - 2\pi \approx 10 - 6,283 = 3,717$.
- Cette valeur dépasse $\pi \approx 3,142$: elle n'appartient pas à $] -\pi ; \pi]$. On retranche un tour de plus :

$$3,717 - 2\pi \approx 3,717 - 6,283 = -2,566$$

- Cette fois, $-\pi < -2,57 \leq \pi$: c'est la mesure principale.

$$x \approx -2,57 \text{ rad}$$

Quadrant. $-2,57$ est compris entre $-\pi \approx -3,14$ et $-\frac{\pi}{2} \approx -1,57$: le point image est dans le **troisième quadrant**, où cosinus et sinus sont tous deux négatifs.

- **Contrôle à la calculatrice** : $\cos 10 \approx -0,84$ et $\sin 10 \approx -0,54$: les deux sont bien négatifs $\checkmark$

Réponse. Mesure principale $\approx -2,57$ rad, troisième quadrant.

Correction de l'exercice 14 - L'aiguille des minutes

a) L'aiguille des minutes fait un tour complet, soit 2π radians, en 60 minutes. Le mouvement étant uniforme, on applique la proportionnalité :

$$\alpha = \frac{25}{60} \times 2\pi = \frac{50\pi}{60} = \frac{5\pi}{6}$$

- L'angle vaut $\frac{5\pi}{6}$ radians, soit 150° .
- b) L'extrémité décrit un arc de rayon 9 cm :

$$\ell = R\alpha = 9 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{45\pi}{6} = \frac{15\pi}{2} \approx 23,56 \text{ cm}$$

Attention au sens. Une aiguille tourne dans le sens **des aiguilles d'une montre**, c'est-à-dire le sens **indirect** : en repérage trigonométrique, l'angle parcouru serait $-\frac{5\pi}{6}$. La longueur, elle, reste positive.

- **Contrôle** : un tour entier donnerait $2\pi \times 9 \approx 56,5$ cm ; 25 minutes représentent un peu plus de 40 % du tour, et $\frac{23,56}{56,5} \approx 0,42$ ✓

Réponse. a) $\frac{5\pi}{6}$ rad (150°) — b) $\frac{15\pi}{2} \approx 23,56$ cm.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : tout sur un réel

- a) $2\pi = \frac{8\pi}{4}$, donc on retranche deux tours :

$$\frac{17\pi}{4} - \frac{16\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

- La mesure principale est $\frac{\pi}{4}$, soit 45° .
 — b) $\frac{\pi}{4}$ est dans le **premier quadrant** : cosinus et sinus sont positifs et égaux.

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- c) La mesure principale de $-x$ est l'opposée : $-\frac{\pi}{4}$, soit -45° , dans le quatrième quadrant.
 — On applique les formules des angles opposés :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- **Contrôle** : $\cos^2 + \sin^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ dans les deux cas ✓

Bilan de méthode. Un réel se ramène toujours à sa mesure principale, puis à une valeur remarquable du premier quadrant grâce aux symétries.

Réponse. a) $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ — b) premier quadrant, $\cos x = \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — c) $-\frac{\pi}{4}$, $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.