

Plaquette 3 - Équations trigonométriques

Trigonométrie — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation en cosinus. Pour $a \in [-1; 1]$, si α est une solution :

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Les deux solutions d'un tour sont **opposées** : les points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Équation en sinus.

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Les deux solutions d'un tour sont **supplémentaires** : symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Pas de solution si $|a| > 1$, puisque cosinus et sinus restent entre -1 et 1 .

Méthode, en quatre temps.

- **1.** Isoler $\cos x$ ou $\sin x$ (ou se ramener à une égalité de cosinus).
- **2.** Reconnaître une **valeur remarquable** α .
- **3.** Écrire les deux familles de solutions avec $+2k\pi$.
- **4. Sélectionner** celles qui appartiennent à l'intervalle demandé, en faisant varier k .

Équation en $2x$ ou en $x + \varphi$. On résout d'abord en posant $X = 2x$ (ou $X = x + \varphi$), puis on revient à x : attention, diviser par 2 transforme $2k\pi$ en $k\pi$, ce qui **double** le nombre de solutions par tour.

Inéquation. On repère sur le cercle l'**arc** où la condition est vérifiée, puis on le traduit en intervalle.

Correction de l'exercice 1 - Première équation en cosinus

Étape 1 — la valeur remarquable. On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc l'équation s'écrit

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

Étape 2 — les deux familles de solutions.

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Étape 3 — la sélection dans $]-\pi; \pi]$. Pour $k = 0$, on obtient $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$, tous deux dans l'intervalle. Pour $k = 1$ ou $k = -1$, les valeurs dépassent π ou $-\pi$.

$$S = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$$

Sur le cercle. Une droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$ coupe le cercle en **deux** points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses : d'où deux solutions opposées.

Réponse. $S = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 2 - Première équation en sinus

Valeur remarquable : $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc l'équation s'écrit $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$.

Les deux familles, cette fois avec le **supplémentaire** :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Sélection dans $]-\pi; \pi]$: pour $k = 0$, on obtient $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$, tous deux dans l'intervalle.

$$S = \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$$

La différence à ne pas confondre. Pour un cosinus, les solutions sont **opposées** ; pour un sinus, elles sont **supplémentaires**. Sur la figure, la droite horizontale d'ordonnée $\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe **vertical**.

Réponse. $S = \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 3 - Avec un second membre négatif

On cherche l'angle de référence. La valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond à $\frac{\pi}{4}$; le signe **moins** place les solutions à gauche de l'axe vertical, donc dans les deuxième et troisième quadrants.

— On utilise $\cos(\pi - x) = -\cos x$:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

— L'équation devient $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$, d'où

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

— **Sélection** : pour $k = 0$, les deux valeurs appartiennent à $]-\pi; \pi]$.

$$S = \left\langle -\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$$

— **Vérification** : $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

Réponse. $S = \left\langle -\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 4 - Un sinus négatif

Angle de référence : $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le signe moins place les solutions **sous** l'axe horizontal, donc dans les troisième et quatrième quadrants.

— On utilise $\sin(-x) = -\sin x$:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin \frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

— Les deux familles de solutions, avec $\alpha = -\frac{\pi}{3}$:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

- **Sélection dans $]-\pi; \pi]$** : la première famille donne $-\frac{\pi}{3}$ pour $k = 0$. La seconde donne $\frac{4\pi}{3}$, hors de l'intervalle ; avec $k = -1$:

$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$S = \left\langle -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right\rangle$$

- **Contrôle** : les deux points sont bien symétriques par rapport à l'axe vertical, et sous l'axe horizontal ✓

Réponse. $S = \left\langle -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 5 - Les cas particuliers

Ces équations se lisent **directement sur le cercle** : on cherche les points dont l'abscisse (ou l'ordonnée) vaut 0, 1 ou -1 .

- a) L'abscisse est nulle sur l'axe **vertical** : deux points, en haut et en bas.

$$S = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- b) L'ordonnée est nulle sur l'axe **horizontal** : les points I et son opposé, soit $x = 0$ ou $x = \pi$. Dans $]-\pi; \pi]$: $S = \{0; \pi\}$.

- c) L'abscisse vaut 1 **seulement** au point I : une unique solution, $x = 0$.

- d) L'ordonnée vaut -1 seulement au point le plus bas : $x = -\frac{\pi}{2}$.

Le point important. Quand $a = 1$ ou $a = -1$, la droite est **tangente** au cercle : il n'y a plus qu'une solution par tour, au lieu de deux.

Réponse. a) $\pm\frac{\pi}{2}$ — b) 0 et π — c) 0 — d) $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Quand il n'y a pas de solution

On commence toujours par **isoler** le cosinus ou le sinus, puis on compare à $[-1; 1]$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

- a) $2 > 1$: **aucune solution**, $S = \emptyset$.
 — b) On isole : $\sin x = \frac{4}{3} \approx 1,33 > 1$: **aucune solution**.
 — c) On isole : $2 \cos x = -1$, donc $\cos x = -\frac{1}{2}$, valeur bien comprise entre -1 et 1 .
 — Or $-\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3}$, d'où

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Le réflexe à prendre. Avant toute recherche de valeur remarquable, on vérifie que le second membre est bien dans $[-1; 1]$: cela évite de chercher une solution qui n'existe pas.

Réponse. a) et b) $\emptyset$ — c) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Correction de l'exercice 7 - Écrire toutes les solutions

- **Valeur remarquable** : $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 — **Toutes les solutions** :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- **Sélection dans** $[0; 2\pi]$, en faisant varier k :
- première famille : $k = 0$ donne $\frac{\pi}{4}$; $k = 1$ donne $\frac{9\pi}{4} > 2\pi$, rejeté ;
- seconde famille : $k = 0$ donne $\frac{3\pi}{4}$; $k = 1$ donne $\frac{11\pi}{4} > 2\pi$, rejeté ;
- $k = -1$ donnerait des valeurs négatives dans les deux cas.

$$S = \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$$

Rédaction attendue. « $k \in \mathbb{Z}$ » n'est pas facultatif : sans lui, on ne décrit qu'une solution parmi une infinité. Et la sélection se fait **en testant les valeurs de k** , pas à l'intuition.

Réponse. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; dans $[0; 2\pi]$: $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 8 - Une équation où l'angle est doublé

On résout d'abord en $2x$, comme si c'était l'inconnue :

$$\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

On divise par 2 — et c'est ici que tout se joue : le terme $2k\pi$ devient $k\pi$.

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Sélection dans $]-\pi; \pi]$:

- première famille : $k = 0$ donne $\frac{\pi}{6}$; $k = 1$ donne $\frac{7\pi}{6}$, rejeté ; $k = -1$ donne $-\frac{5\pi}{6}$, accepté ;
- seconde famille : $k = 0$ donne $-\frac{\pi}{6}$; $k = 1$ donne $\frac{5\pi}{6}$, accepté.

$$S = \left\langle -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$$

Le piège. Il y a **quatre** solutions, et non deux : quand x fait un tour, $2x$ en fait deux.

Réponse. $S = \left\langle -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 9 - Une équation avec un décalage

On pose $X = x + \frac{\pi}{4}$ et on résout $\sin X = 1$.

- Le sinus vaut 1 **en un seul point** du cercle, le plus haut :

$$X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- **Retour à x** : $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

- **Sélection dans** $]-\pi; \pi]$: seul $k = 0$ convient, soit $x = \frac{\pi}{4}$.
- **Vérification** : $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ✓

Différence avec l'exercice précédent. Ici le coefficient de x vaut 1 : le terme $2k\pi$ reste $2k\pi$, et il n'y a qu'une solution par tour.

Réponse. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; dans $]-\pi; \pi]$: $x = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 10 - Une équation du second degré déguisée

Changement d'inconnue. On pose $X = \cos x$, avec la contrainte $X \in [-1; 1]$:

$$2X^2 - X - 1 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 1 + 8 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$.

— **Racines** : $X_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{1+3}{4} = 1$. Les deux sont dans $[-1; 1]$: on les garde.

Retour à x .

— $\cos x = 1$ donne $x = 0$.

— $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$ donne $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$.

$$S = \left\langle -\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{2\pi}{3} \right\rangle$$

— **Vérification pour $x = 0$** : $2 - 1 - 1 = 0$ ✓

— **Vérification pour $x = \frac{2\pi}{3}$** : $2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ ✓

Attention. Une racine hors de $[-1; 1]$ serait à **rejeter** : aucun réel n'a un cosinus égal à 2.

Réponse. $S = \left\langle -\frac{2\pi}{3}; 0; \frac{2\pi}{3} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 11 - Cosinus égal au sinus

Méthode géométrique. L'égalité $\cos x = \sin x$ signifie que le point image a une abscisse **égale** à son ordonnée : il appartient à la droite d'équation $y = x$, la première bissectrice. Celle-ci coupe le cercle en **deux** points diamétralement opposés.

Méthode calculatoire. On utilise $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

— **Premier cas** : $x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$, donc $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

— **Second cas** : $x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$, soit $x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ce qui donne $0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$: **impossible**.

— **Sélection** : $k = 0$ donne $\frac{\pi}{4}$; $k = -1$ donne $-\frac{3\pi}{4}$.

$$S = \left\langle -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

— **Vérification** : en $-\frac{3\pi}{4}$, cosinus et sinus valent tous deux $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

Réponse. $S = \left\langle -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 12 - Une inéquation en cosinus

On résout d'abord l'égalité, qui donne les **bornes** : $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x = \pm\frac{\pi}{3}$.

On lit ensuite le cercle. Le cosinus est l'abscisse : la condition $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sélectionne les

points situés à **droite** de la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$. C'est l'arc qui contient le point I , compris entre les deux bornes.

$$S = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$$

— **Contrôle** : $\cos 0 = 1 \geq \frac{1}{2}$ ✓, et 0 appartient bien à l'intervalle ; $\cos \pi = -1 < \frac{1}{2}$ ✓, et π en est exclu.

Le piège. On ne peut pas « passer à l'inverse du cosinus » comme dans une inéquation ordinaire : c'est la **lecture de l'arc** sur le cercle qui donne l'ensemble solution.

Bornes incluses car l'inégalité est large.

Réponse. $S = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$.

Correction de l'exercice 13 - Une inéquation en sinus

Les bornes. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$ dans $[0; 2\pi]$.

La lecture. Le sinus est l'ordonnée : la condition $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ sélectionne les points **au-dessus** de la droite horizontale d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C'est l'arc situé en haut du cercle, entre les deux bornes, et qui contient le point d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$S = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[$$

— **Contrôle** : $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓ et $\frac{\pi}{2}$ appartient à l'intervalle ; $\sin \pi = 0$ ✓ et π en est exclu.

— Les bornes sont **exclues** car l'inégalité est stricte.

Erreur classique. Écrire $\left] \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$: un intervalle se note toujours de la plus petite à la plus grande borne. Ici l'arc solution est bien celui qui passe par le haut.

Réponse. $S = \left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[$.

Correction de l'exercice 14 - La hauteur de la marée

— a) Le cosinus vaut au maximum 1, donc $h(t) \leq 5 + 3 = 8$ m.

— Ce maximum est atteint quand $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1$, c'est-à-dire $\frac{\pi t}{6} = 0 + 2k\pi$, soit $t = 12k$.
Dans $[0; 12]$: $t = 0$ h et $t = 12$ h.

— b) On résout $h(t) = 6,5$:

$$5 + 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 6,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$$

— Donc $\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi t}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

— **On multiplie par $\frac{6}{\pi}$** : $t = 2 + 12k$ ou $t = -2 + 12k$.

— **Sélection dans $[0; 12]$** : $t = 2$ (première famille, $k = 0$) et $t = 10$ (seconde famille, $k = 1$).

La hauteur vaut 6,5 m au bout de 2 h et de 10 h.

— **Contrôle** : $h(6) = 5 - 3 = 2$ m, la marée basse, bien située entre les deux ✓

Réponse. a) 8 m à $t = 0$ et $t = 12$ h — b) $t = 2$ h et $t = 10$ h.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : équation à isoler

— **Isolement** : $2 \sin x = -1$, donc

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

— **Angle de référence** : $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, et le signe moins place les solutions **sous** l'axe horizontal, donc dans les troisième et quatrième quadrants.

— $-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, d'où les deux familles :

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

— **Sélection dans** $[0; 2\pi]$: la première famille donne $-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$; la seconde donne $\frac{7\pi}{6}$.

$$S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

— **Dans** $\mathbb{R}$: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

— **Vérification** : $\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ ✓

Réponse. $\left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$, et $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ dans $\mathbb{R}$.