

Plaquette 4 - Formules d'addition

Trigonométrie — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules d'addition.

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

Moyen mnémotechnique. Pour le cosinus, on garde la **même** fonction dans chaque produit (cos cos, sin sin) et le signe **change** ; pour le sinus, on **mélange** les fonctions et le signe est **conservé**.

Formules de duplication (cas $b = a$) :

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

Les trois écritures de $\cos(2a)$ s'obtiennent avec $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$: on choisit celle qui fait apparaître la quantité connue.

Décomposer un angle. Pour une valeur exacte, on écrit l'angle comme somme ou différence de deux angles remarquables :

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

Forme $a \cos x + b \sin x$. On factorise par $\sqrt{a^2 + b^2}$ et on reconnaît une formule d'addition : le résultat est une **seule** fonction sinusoidale, d'amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Correction de l'exercice 1 - Le cosinus de l'angle de 15 degrés

On applique la formule de la différence :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

— Avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

— On remplace par les valeurs remarquables :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

— **Résultat :**

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

— **Contrôle numérique :** $\frac{1,414 + 2,449}{4} \approx 0,966$, et la calculatrice donne $\cos 15^\circ \approx 0,966$ ✓

— **Contrôle de cohérence :** $\frac{\pi}{12}$ est un petit angle, son cosinus doit être proche de 1 ✓

Réponse. $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0,966$.

Correction de l'exercice 2 - Le sinus du même angle

On applique la formule du sinus d'une différence :

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

— Avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

— **Contrôle numérique** : $\frac{2,449 - 1,414}{4} \approx 0,259 \checkmark$

Vérification de la relation fondamentale.

$$\cos^2 + \sin^2 = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{16}$$

— $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 2\sqrt{12}$ et $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{12}$.

— Leur somme vaut 16, donc le quotient vaut 1 $\checkmark$

Remarque. Les doubles produits s'éliminent : c'est le signe que les deux valeurs sont cohérentes entre elles.

Réponse. $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$.

Correction de l'exercice 3 - Une somme d'angles

Formule du cosinus d'une somme :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

— Avec $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

— **Contrôle numérique** : $\approx 0,259$, et $\frac{5\pi}{12} = 75^\circ$, dont le cosinus vaut bien 0,259 $\checkmark$

Une coïncidence qui n'en est pas une. On retrouve exactement $\sin \frac{\pi}{12}$: c'est normal, car $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12}$ sont **complémentaires** —

$$\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Attention au signe. Dans la formule du cosinus, c'est bien un **moins** devant le produit des sinus : l'oublier est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Réponse. $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Correction de l'exercice 4 - Deux décompositions, un seul résultat

Méthode 1 — formule d'addition.

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$- \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Méthode 2 — par le supplémentaire. Comme $\sin(\pi - x) = \sin x$:

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$- \text{Or } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}, \text{ donc}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

— Les deux méthodes donnent le même résultat ✓

— **Contrôle numérique** : $\approx 0,966$, et $\frac{7\pi}{12} = 105^\circ$, dont le sinus vaut 0,966 ✓

Ce que cela montre. Une valeur exacte peut s'obtenir par plusieurs chemins : les symétries et les formules d'addition se complètent, et le double calcul sert de vérification.

Réponse. $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 5 - Développer une expression

Premier développement.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}$$

— En remplaçant par les valeurs remarquables :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

Second développement.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

— **Contrôle en** $x = 0$: la première expression donne $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, et le développement donne $\frac{1}{2} \times 1 - 0 = \frac{1}{2}$ ✓

— **Contrôle en** $x = \frac{\pi}{6}$: la seconde donne $\sin 0 = 0$, et le développement $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ✓

Utilité. Ces développements servent en physique pour décomposer un signal déphasé $\cos(\omega t + \varphi)$ en deux composantes.

Réponse. $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$.

Correction de l'exercice 6 - Des simplifications immédiates

$$\text{a) } \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2}. \text{ Or } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{2} = 1, \text{ donc}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\text{b) } \cos(x + \pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi. \text{ Avec } \cos \pi = -1 \text{ et } \sin \pi = 0 :$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\text{c) } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x = 0 + \sin x, \text{ donc}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Ce que cela démontre. Les symétries apprises au début du chapitre ne sont pas des règles isolées : ce sont des **cas particuliers** des formules d'addition, obtenus en prenant $b = \frac{\pi}{2}$ ou $b = \pi$.

— **Contrôle du a)** en $x = 0$: $\sin \frac{\pi}{2} = 1 = \cos 0$ ✓

Réponse. a) $\cos x$ — b) $-\cos x$ — c) $\sin x$.

Correction de l'exercice 7 - Démontrer la formule de duplication

Pour le sinus. On applique la formule avec $b = a$:

$$\sin(a + a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2 \sin a \cos a$$

Pour le cosinus. De même :

$$\cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

— On utilise alors la relation fondamentale sous la forme $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$$

— En remplaçant plutôt $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, on obtient la troisième écriture : $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$.

— **Contrôle avec** $a = \frac{\pi}{6}$: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

— **Contrôle** : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, et $2 \times \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$ ✓

À quoi servent les trois écritures ? On choisit celle qui utilise la donnée disponible : si on connaît $\cos a$, on prend $2 \cos^2 a - 1$.

Réponse. $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ et $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$.

Correction de l'exercice 8 - Doubler un angle connu

— **Sinus** par la relation fondamentale : $\sin^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, et le premier quadrant impose un sinus positif :

$$\sin a = \frac{4}{5}$$

— **Cosinus du double**, avec l'écriture qui n'utilise que $\cos a$:

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = \frac{18}{25} - \frac{25}{25} = -\frac{7}{25}$$

— **Sinus du double** :

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

— **Contrôle par la relation fondamentale** : $\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49 + 576}{625} = 1$ ✓

Interprétation. $\cos(2a) < 0$ et $\sin(2a) > 0$: le point image de $2a$ est dans le **deuxième quadrant**. C'est cohérent, car $a \approx 0,93$ rad donne $2a \approx 1,85$ rad, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

Réponse. $\sin a = \frac{4}{5}$, $\cos(2a) = -\frac{7}{25}$, $\sin(2a) = \frac{24}{25}$.

Correction de l'exercice 9 - Vérifier une identité

On développe le produit des deux formules d'addition :

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$$

- On reconnaît une **différence de carrés** $(X-Y)(X+Y) = X^2 - Y^2$ avec $X = \cos a \cos b$ et $Y = \sin a \sin b$:

$$= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$$

- On remplace $\cos^2 b$ par $1 - \sin^2 b$ et $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$:

$$= \cos^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a) \sin^2 b$$

- On développe : $\cos^2 a - \cos^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \cos^2 a \sin^2 b$.
- Les deux termes en $\cos^2 a \sin^2 b$ **s'éliminent** :

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$$

- **Contrôle avec** $a = b = \frac{\pi}{4}$: à gauche $\cos \frac{\pi}{2} \cos 0 = 0$; à droite $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓

Méthode pour une identité. On part du membre le plus compliqué et on le transforme jusqu'à l'autre : on ne « passe » jamais un terme d'un côté à l'autre comme dans une équation.

Réponse. $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \cos^2 a - \sin^2 b$.

Correction de l'exercice 10 - Reconnaître une formule d'addition

On reconnaît le membre de gauche. C'est exactement le développement de

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}$$

- L'équation devient donc :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

- On pose $X = x + \frac{\pi}{3}$ et on résout $\cos X = \cos \frac{\pi}{3}$:

$$X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

- **Retour à x** : $x = X - \frac{\pi}{3}$, donc $x = 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

- **Sélection dans $] -\pi ; \pi]$** : $x = 0$ et $x = -\frac{2\pi}{3}$.

$$S = \left\langle -\frac{2\pi}{3} ; 0 \right\rangle$$

- **Vérification pour $x = 0$** : le membre de gauche vaut $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ✓

Le réflexe. Devant une expression de la forme $\cos x \cos \alpha \pm \sin x \sin \alpha$, on ne développe pas : on **regroupe** en un seul cosinus.

Réponse. $S = \left\langle -\frac{2\pi}{3} ; 0 \right\rangle$.

Correction de l'exercice 11 - Regrouper en une seule fonction

On développe le membre de droite, c'est le sens le plus sûr :

$$2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

— On remplace : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$$

— L'identité est démontrée.

Maximum. Comme $-1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$:

$$-2 \leq \sqrt{3} \cos x + \sin x \leq 2$$

— Le maximum vaut 2, atteint quand $\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

— **Contrôle** : pour $x = \frac{\pi}{6}$, l'expression vaut $\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ ✓

D'où vient le 2 ? C'est $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$: l'**amplitude** de la sinusoïde obtenue.

Réponse. Maximum 2, atteint pour $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Correction de l'exercice 12 - Deux signaux qui s'additionnent

a) On factorise par $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$:

$$3 \cos(\omega t) + 4 \sin(\omega t) = 5 \left(\frac{3}{5} \cos(\omega t) + \frac{4}{5} \sin(\omega t) \right)$$

— On cherche φ tel que $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ et $\sin \varphi = \frac{4}{5}$; c'est possible car $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$.

— L'expression devient :

$$5(\cos \varphi \cos(\omega t) + \sin \varphi \sin(\omega t)) = 5 \cos(\omega t - \varphi)$$

— avec $\varphi \approx 0,927$ rad (soit environ 53°).

— b) L'amplitude est donc $A = 5$ volts.

Le résultat qui surprend. Les amplitudes ne s'additionnent pas : $3 + 4 = 7$ serait faux. Comme les deux signaux sont **déphasés** d'un quart de période, leurs amplitudes se composent comme les côtés d'un triangle rectangle — d'où $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

— **Contrôle en** $t = 0$: la somme vaut 3, et $5 \cos(-0,927) = 5 \times 0,6 = 3$ ✓

Réponse. a) $5 \cos(\omega t - \varphi)$ avec $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ — b) amplitude 5 V.

Correction de l'exercice 13 - Le double d'un angle remarquable

a) $2a = \frac{\pi}{4}$, donc $\cos(2a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) On utilise l'écriture de la duplication qui fait intervenir $\cos^2 a$:

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$$

— D'où $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puis

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

- **Racine carrée** : $\frac{\pi}{8}$ appartient au premier quadrant, donc son cosinus est **positif** :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

- **Contrôle numérique** : $\sqrt{2+1,414} = \sqrt{3,414} \approx 1,848$, donc $\cos \frac{\pi}{8} \approx 0,924$; la calculatrice donne $\cos 22,5^\circ \approx 0,924$ ✓

La technique. La duplication se lit **dans les deux sens** : connaissant $\cos(2a)$, on remonte à $\cos a$. C'est ce qu'on appelle une formule de l'angle moitié.

Réponse. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ — b) $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Une équation avec duplication

On utilise la duplication, puis on factorise — surtout pas de division par $\sin x$.

$$2 \sin x \cos x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

- On met $\sin x$ en facteur :

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

- **Règle du produit nul** : $\sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$.
 — **Premier cas** : $\sin x = 0$ donne $x = 0$ ou $x = \pi$ dans $[0; 2\pi[$.
 — **Second cas** : $\cos x = \frac{1}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$, soit $\frac{5\pi}{3}$ dans l'intervalle demandé.

$$S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

- **Vérification pour $x = \pi$** : $\sin(2\pi) = 0$ et $\sin \pi = 0$ ✓

Le piège. Simplifier par $\sin x$ ferait perdre les solutions 0 et π : comme pour les équations polynomiales, on **factorise**, on ne divise jamais par une expression contenant l'inconnue.

Réponse. $S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} \right\}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : du calcul exact à l'équation

- a) On reconnaît la **moitié** d'une formule de duplication :

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a \quad \text{donc} \quad \sin a \cos a = \frac{\sin(2a)}{2}$$

- Avec $a = \frac{\pi}{12}$, on a $2a = \frac{\pi}{6}$:

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

- b) Le calcul se relit dans l'autre sens : $\sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$, ce qui est bien la valeur remarquable attendue.
 — **Contrôle par les valeurs exactes** trouvées aux premiers exercices :

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{6-2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

- Les deux méthodes concordent ✓

Ce qu'il faut voir. Reconnaître une formule de duplication évite un calcul avec des radicaux : la bonne formule remplace souvent une demi-page de calculs.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ — b) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓