Plaquette 4 – Radians, cercle et triangle rectangle : applications

Trigonométrie — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Radian et longueur d'arc. Sur un cercle de rayon R, un angle de θ radians intercepte un arc de longueur

$$\ell = R\,\theta \qquad \text{et} \qquad \pi \text{ rad} = 180°$$

Point d'un cercle. Sur le cercle de centre O et de rayon R, le point associé à l'angle θ a pour coordonnées $(R\cos\theta\,;R\sin\theta)$.

Lien avec le triangle rectangle. Pour $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, si un triangle rectangle a un angle aigu θ :

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

Valeurs remarquables.

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Elles se démontrent avec la diagonale d'un carré ($\frac{\pi}{4}$) et la hauteur d'un triangle équilatéral ($\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$).

Vitesse angulaire. Un objet qui tourne de ω radians par seconde sur un cercle de rayon R parcourt $R\omega$ mètres par seconde.

Correction de l'exercice 1 – Longueur d'un arc

a) La longueur d'un arc vaut $\ell = R\theta$, l'angle étant en radians :

$$\ell = 5 \times \frac{2\pi}{5} = 2\pi \approx 6{,}28 \text{ cm}$$

b) On isole l'angle : $\theta = \dfrac{\ell}{R} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$ rad. Pour passer en degrés, on utilise π rad $= 180°$: $1{,}5 \times \dfrac{180}{\pi} \approx 85{,}9°$, soit environ $86°$.

Le radian est l'unité pour laquelle la formule de l'arc est la plus simple : sur un cercle de rayon 1, la longueur de l'arc est égale à la mesure de l'angle. C'est ce qui justifie l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique.

Réponse. a) $2\pi \approx 6{,}28$ cm ; b) 1,5 rad, soit environ $86°$.

Correction de l'exercice 2 – L'aiguille des minutes

a) En 60 minutes, l'aiguille fait un tour complet, soit 2π rad. En 20 minutes, un tiers de tour : $\dfrac{2\pi}{3}$ rad. En 45 minutes, trois quarts de tour : $\dfrac{3\pi}{2}$ rad.

b) L'extrémité parcourt un arc de rayon 12 cm :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\ell = 12 \times \frac{2\pi}{3} = 8\pi \approx 25{,}1 \text{ cm}$$

c) L'extrémité parcourt $2\pi \times 12 = 24\pi$ cm en 60 minutes, soit $\frac{24\pi}{60} = 0{,}4\pi$ cm par minute. Pour 10 cm, il faut $\frac{10}{0{,}4\pi} \approx 7{,}96$ minutes, soit environ 8 minutes. On peut aussi raisonner sur l'angle : $\theta = \frac{10}{12} \approx 0{,}833$ rad, qui représente $\frac{0{,}833}{2\pi}$ d'un tour de 60 min.

Réponse. a) $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{2}$ rad ; b) $8\pi \approx 25{,}1$ cm ; c) environ 8 min.

Correction de l'exercice 3 – Coordonnées d'un point sur un cercle

Le point associé à l'angle θ a pour coordonnées $(4\cos\theta\,;4\sin\theta)$. On utilise les valeurs remarquables et, pour les angles hors du premier quadrant, la lecture du cercle :

— A : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $A\left(2\,;2\sqrt{3}\right)$;

— B : $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (symétrique de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des ordonnées), donc $B\left(-2\sqrt{2}\,;2\sqrt{2}\right)$;

— C : $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$, donc $C(-4\,;0)$;

— D : $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $D\left(2\sqrt{3}\,;-2\right)$.

Contrôle : chaque point est à la distance 4 de O ; par exemple $OA^2 = 4 + 12 = 16$ et

$$OB^2 = 8 + 8 = 16$$

Réponse. $A\left(2\,;2\sqrt{3}\right)$, $B\left(-2\sqrt{2}\,;2\sqrt{2}\right)$, $C(-4\,;0)$, $D\left(2\sqrt{3}\,;-2\right)$.

Correction de l'exercice 4 – Démontrer les valeurs en π/4

a) Le triangle OHM est rectangle en H par construction. L'angle $H\hat{O}M$ mesure $\frac{\pi}{4}$, soit 45° ; la somme des angles d'un triangle valant 180°, l'angle $O\hat{M}H$ mesure aussi 45°. Le triangle a deux angles égaux : il est isocèle, avec $OH = HM$.

b) Les coordonnées de M sont $\left(\cos\frac{\pi}{4}\,;\sin\frac{\pi}{4}\right) = (OH\,;HM)$, et ces deux nombres sont positifs et égaux ; notons-les c. Le théorème de Pythagore dans OHM, d'hypoténuse $OM = 1$, donne

$$c^2 + c^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puisque $c > 0$. Donc $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. On retrouve que la diagonale d'un carré de côté c mesure $c\sqrt{2}$.

Réponse. a) Angles de 45° en O et en M ; b) $2c^2 = 1$ donne $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 5 – Démontrer les valeurs en π/3 et π/6

a) $OI = OM = 1$, donc OIM est isocèle en O, avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$, soit 60°. Les deux autres angles sont égaux et leur somme vaut 120° : ils mesurent 60° chacun, et le triangle est équilatéral. Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue de M est aussi la médiane : son pied H est le milieu de $[OI]$.

b) Donc $\cos\frac{\pi}{3} = OH = \frac{1}{2}$. Par Pythagore dans OHM : $HM^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, d'où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sin\frac{\pi}{3} = HM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) La symétrie par rapport à la droite $y = x$ échange abscisse et ordonnée ; elle envoie le point associé à $\frac{\pi}{3}$ sur le point associé à $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Donc $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Réponse. b) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 6 – La longueur d’une ombre

a) Le sommet de l’arbre, son pied et l’extrémité de l’ombre forment un triangle rectangle au pied de l’arbre. L’angle θ est en l’extrémité de l’ombre ; le côté opposé est l’arbre (10 m), le côté adjacent est l’ombre L. En notant d l’hypoténuse, $\sin\theta = \frac{10}{d}$ et $\cos\theta = \frac{L}{d}$, d’où

$$L = d\cos\theta = \frac{10\cos\theta}{\sin\theta}$$

b) Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$: $L = \dfrac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ m. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$: $L = 10$ m, puisque cosinus et sinus sont égaux. Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: $L = \dfrac{10 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}8$ m. Plus le soleil est haut, plus l’ombre est courte.

Réponse. a) $L = \frac{10\cos\theta}{\sin\theta}$; b) $10\sqrt{3}$; 10 ; $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m.

Correction de l’exercice 7 – La grande roue

a) Dans un repère d’origine O et d’unité le mètre, la nacelle a pour coordonnées $(20\cos\theta\,;20\sin\theta)$. Son ordonnée est sa hauteur au-dessus du centre ; on ajoute la hauteur du centre, 22 m.

b) On obtient $h = 22$ m pour $\theta = 0$, $h = 22 + 20 \times \frac{1}{2} = 32$ m pour $\frac{\pi}{6}$, $h = 42$ m au sommet ($\frac{\pi}{2}$), $h = 22 - 10 = 12$ m pour $\frac{7\pi}{6}$ (où $\sin\theta = -\frac{1}{2}$) et $h = 2$ m au point le plus bas ($-\frac{\pi}{2}$).

c) On cherche $22 + 20\sin\theta = 32$, soit $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Sur le cercle trigonométrique, les points d’ordonnée $\frac{1}{2}$ sont associés à

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \text{et} \qquad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

La nacelle est à 32 m une fois en montant et une fois en descendant.

Réponse. b) 22 ; 32 ; 42 ; 12 ; 2 m ; c) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$.

Correction de l’exercice 8 – Approcher π comme Archimède

a) L’hexagone inscrit est formé de 6 triangles de sommet O, d’angle au centre $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, isocèles de côtés 1 : ils sont équilatéraux, donc chaque côté vaut 1. Pour l’hexagone circonscrit, chaque triangle de sommet O a pour hauteur le rayon 1 ; un demi-côté c vérifie, dans le triangle rectangle d’angle $\frac{\pi}{6}$ en O, $c = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; le côté

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

vaut $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) Le cercle de périmètre 2π est entre les deux hexagones, de périmètres 6 et $\frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. Donc $6 \leq 2\pi \leq 4\sqrt{3}$, soit

$$3 \leq \pi \leq 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$$

c) Les demi-périmètres encadrent π, de plus en plus finement quand n double. Pour $n = 96$, on obtient $3{,}14103 \leq \pi \leq 3{,}14271$: $\pi \approx 3{,}14$ à 10^{-2} près, l'encadrement célèbre d'Archimède $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

Réponse. a) Côtés 1 et $\frac{2}{\sqrt{3}}$; b) $3 \leq \pi \leq 2\sqrt{3}$; c) pour 96 côtés, $3{,}141 \leq \pi \leq 3{,}143$.

Correction de l'exercice 9 – Le point image d'un grand réel

a) On a $\frac{47\pi}{6} - 8\pi = \frac{47\pi - 48\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, qui est bien dans $]-\pi\,;\pi]$. Comme 8π correspond à quatre tours complets, $\frac{47\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ sont associés au même point du cercle.

b) Donc $\cos\frac{47\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{47\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$: le point est sous l'axe des abscisses, symétrique de celui de $\frac{\pi}{6}$.

c) $-\frac{29\pi}{4} + 8\pi = \frac{-29\pi + 32\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Le point associé est celui de $\frac{3\pi}{4}$, dans le deuxième quadrant :

$$\cos\left(-\frac{29\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Réponse. a) Point de $-\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}$; c) point de $\frac{3\pi}{4}$: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 10 – Cordes d'un cercle

a) $I(1\,;0)$, $A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, le point associé à $\frac{2\pi}{3}$ étant le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Par la formule de la distance :

$$IA^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

donc $IA = 1$; $AB = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, les deux points ayant la même ordonnée ;

$IB^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 3$, donc $IB = \sqrt{3}$.

c) $OI = IA = AB = BO = 1$: les quatre côtés sont égaux, $OIAB$ est un losange. Ce n'est pas un carré, puisque ses diagonales $OA = 1$ et $IB = \sqrt{3}$ n'ont pas la même longueur. Les triangles OIA et OAB sont équilatéraux.

Réponse. a) $I(1\,;0)$, $A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; b) 1, 1, $\sqrt{3}$; c) un losange.

Correction de l'exercice 11 – Aire d'un triangle inscrit

a) On prend $[OI]$ comme base, de longueur 1. La hauteur correspondante est la distance de M à l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'ordonnée de M, $\sin\theta$, positive pour $\theta \in [0\,;\pi]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'aire vaut donc

$$A = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$$

b) On obtient $\frac{1}{4}$ pour $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354$ pour $\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{2}$ pour $\frac{\pi}{2}$, et $\frac{1}{4}$ pour $\frac{5\pi}{6}$, puisque $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

c) L'ordonnée d'un point du cercle vaut au plus 1, et elle vaut 1 seulement au point associé à $\frac{\pi}{2}$. L'aire est donc maximale, égale à $\frac{1}{2}$, quand $\theta = \frac{\pi}{2}$: le triangle est alors rectangle en O.

Réponse. a) Base 1, hauteur $\sin\theta$; b) $\frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; c) maximum $\frac{1}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Vitesse angulaire

a) Un tour, soit 2π rad, en 12 s :

$$\omega = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$$

b) En une seconde, chaque cheval parcourt un arc d'angle $\frac{\pi}{6}$: $3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ m pour le premier, $5 \times \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \approx 2{,}62$ m pour le second. En une minute, on multiplie par 60 : environ 94 m et 157 m. Le cheval extérieur va plus vite, alors que les deux tournent du même angle.

c) Au bout de 2 s, le manège a tourné de $2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Au bout de 9 s, de $\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, dont la mesure principale est $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$: le manège a fait les trois quarts d'un tour.

Réponse. a) $\frac{\pi}{6}$ rad/s ; b) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ m et $\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}62$ m par seconde ; c) $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 13 – La pente d'une route

a) La route, la verticale et l'horizontale forment un triangle rectangle d'hypoténuse 2 km et d'angle θ. Le dénivelé est le côté opposé, $2\sin\theta$ km ; le déplacement horizontal est le côté adjacent, $2\cos\theta$ km.

b) Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$: dénivelé $2 \times \frac{1}{2} = 1$ km, déplacement horizontal $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ km. C'est une pente énorme, impossible pour une route.

c) Avec la calculatrice, $\sin(0{,}0997) \approx 0{,}0995$, d'où un dénivelé de $2\,000 \times 0{,}0995 \approx 199$ m. L'approximation donne

$$2\,000 \times 0{,}0997 \approx 199{,}4 \text{ m}$$

presque le même résultat : pour un petit angle, l'arc et la corde se confondent presque, et $\sin\theta \approx \theta$ (θ en radians). Pour $\theta = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$, en revanche, $\sin\theta = 0{,}5$ s'écarte déjà de θ.

Réponse. a) $2\sin\theta$ et $2\cos\theta$ km ; b) 1 km et $\sqrt{3}$ km ; c) environ 199 m ; $\sin\theta \approx \theta$ pour les petits angles.

Correction de l'exercice 14 – Six points régulièrement espacés

a) Deux points consécutifs sont séparés par un arc de $\frac{\pi}{3}$: les six points forment un hexagone régulier inscrit dans le cercle, de côté 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Les cosinus valent 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, de somme nulle. Les sinus valent 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, de somme nulle aussi :

$$\sum \cos = 0 \qquad \sum \sin = 0$$

c) La somme des abscisses et la somme des ordonnées des six sommets sont nulles : le centre de gravité des six sommets, de coordonnées égales à ces sommes divisées par 6, est l'origine O, centre de l'hexagone. C'est cohérent avec la symétrie de la figure : chaque sommet a son symétrique par rapport à O, de coordonnées opposées.

Réponse. a) Un hexagone régulier ; b) les deux sommes sont nulles ; c) le centre de gravité des sommets est O.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un satellite en orbite

a) Un tour de 2π rad en 100 min : $\omega = \frac{2\pi}{100} = \frac{\pi}{50}$ rad/min. En une minute, il parcourt $7\,000 \times \frac{\pi}{50} = 140\pi \approx 440$ km, soit environ $26\,400$ km/h.

b) Au bout de t minutes, l'angle vaut $\frac{\pi t}{50}$, et le satellite est au point $\left(7\,000\cos\frac{\pi t}{50} ; 7\,000\sin\frac{\pi t}{50}\right)$. Pour $t = 25$, l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$: point $(0\,;7\,000)$. Pour $t = 50$, l'angle vaut π : point $(-7\,000\,;0)$. Pour $t = \frac{100}{12}$, l'angle vaut $\frac{\pi}{6}$:

$$\left(7\,000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} ; 7\,000 \times \frac{1}{2}\right) = \left(3\,500\sqrt{3}\,;3\,500\right)$$

c) On résout $\frac{\pi t}{50} = \frac{3\pi}{4}$, soit $t = \frac{3 \times 50}{4} = 37{,}5$ minutes.

d) En 3 heures, soit 180 minutes, le satellite parcourt $180 \times 140\pi = 25\,200\pi \approx 79\,200$ km, c'est-à-dire $1{,}8$ tour.

Réponse. a) $\frac{\pi}{50}$ rad/min, environ $26\,400$ km/h ; b) $(0\,;7\,000)$, $(-7\,000\,;0)$, $\left(3\,500\sqrt{3}\,;3\,500\right)$; c) $37{,}5$ min ; d) environ $79\,200$ km.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).