Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cercle, angles associés et équations

Trigonométrie — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cercle trigonométrique. Un réel x repère un point M du cercle de rayon 1 ; alors $\cos x$ est son abscisse et $\sin x$ son ordonnée. Deux réels repèrent le même point s'ils diffèrent d'un multiple de 2π.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$$

Valeurs remarquables.

! x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Angles associés.

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Équations de référence (sur $\mathbb{R}$) :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

Triangle rectangle. Pour un angle aigu θ : $\cos\theta = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ et $\sin\theta = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$. Aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.

Correction de l'exercice 1 – Mesure principale

— **Méthode** : on retire un multiple de 2π pour tomber dans $]-\pi\,;\pi]$.

— **Premier angle** : $\dfrac{25\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{25\pi - 12\pi}{6} = \dfrac{13\pi}{6}$, puis $\dfrac{13\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\frac{25\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}$$

— **Deuxième angle** : $-\dfrac{17\pi}{4} + 4\pi = \dfrac{-17\pi + 16\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$.

$$-\frac{17\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}$$

— **Troisième angle** : $\dfrac{15\pi}{2} - 6\pi = \dfrac{15\pi - 12\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$, qui n'est pas dans l'intervalle ; on retire encore 2π : $\dfrac{3\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{15\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$$

— **Contrôles** : $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi$ ✓ ; $-\frac{17\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 4\pi$ ✓ ; $\frac{15\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 8\pi$ ✓

— **Vérification par les cosinus** : $\cos\frac{25\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ ✓ et $\cos\frac{15\pi}{2} = 0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ✓

Réponse. $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Angles associés

— **Par les formules des angles associés** :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{1}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\cos(-x) = \cos x = \frac{1}{3} \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x = -\frac{1}{3}$$

— **Lecture sur le cercle** : $\pi - x$ est le symétrique de x par rapport à l'axe des **ordonnées** — l'abscisse change de signe, l'ordonnée non.

— $-x$ est le symétrique par rapport à l'axe des **abscisses** — le cosinus est donc conservé.

— $\pi + x$ est le symétrique par rapport à l'**origine** — les deux coordonnées changent de signe.

— **Valeur du sinus** : $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, donc $\sin x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx \pm 0{,}9428$ — le signe dépend du **quadrant**, non déterminé ici.

— **Contrôle numérique** : $\cos x = \frac{1}{3}$ correspond à $x \approx 1{,}2310$ rad, et $\cos(\pi - x) = \cos(1{,}9106) \approx -0{,}3333$ ✓

Réponse. $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 3 – Équation en cosinus

— **Valeur de référence** : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— **Solutions générales** :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

— **Sur** $[0\,;2\pi[$: la première famille donne $\frac{\pi}{4}$; la seconde, avec $k = 1$, donne $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

$$S = \left\langle \frac{\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4} \right\rangle$$

— **Contrôles** : $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

— **Valeurs numériques** : $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$ et $\frac{7\pi}{4} \approx 5{,}4978$, tous deux dans $[0\,;2\pi[\approx [0\,;6{,}2832[$ ✓

— **Lecture géométrique** : la droite verticale $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ coupe le cercle en **deux** points symétriques par rapport à l'axe des abscisses — d'où les deux solutions par tour.

— **Piège** : oublier la solution $-\frac{\pi}{4}$ ne donnerait que la moitié des réponses.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $S = \left\langle \frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$ sur $[0 ; 2\pi[$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 – Équation en sinus

— **Valeur de référence** : $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

— **Solutions générales** :

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

— **Sur** $]-\pi ; \pi]$: la première famille donne $-\frac{\pi}{6}$; la seconde, avec $k = -1$, donne $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

$$S = \left\langle -\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} \right\rangle$$

— **Contrôles** : $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ ✓

— **Valeurs numériques** : $-\frac{5\pi}{6} \approx -2{,}618$ et $-\frac{\pi}{6} \approx -0{,}5236$, tous deux dans $]-\pi ; \pi]$ ✓

— **Lecture géométrique** : la droite horizontale $Y = -\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points du **demi-plan inférieur**, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ✓

— **Cohérence** : les deux solutions vérifient $x_1 + x_2 = -\pi$, ce qui traduit exactement la relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ transposée sur cet intervalle.

Réponse. $S = \left\langle -\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 5 – Valeurs exactes en des angles non remarquables

Chaque angle est associé à une valeur remarquable du premier quadrant par une symétrie du cercle.

$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$: le point est le symétrique de celui de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des ordonnées, donc $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$: le point est le symétrique de celui de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'origine, donc $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$: de même, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$: même point que $-\frac{\pi}{3}$, symétrique de celui de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à l'axe des abscisses, donc $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Enfin, le cosinus ne change pas quand on change le signe de l'angle :

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Contrôle des signes : les points de $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont à gauche de l'axe des ordonnées, ceux de $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{3}$ sous l'axe des abscisses.

Réponse. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Du sinus au cosinus

On utilise la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Comme $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, le point associé est dans le premier quadrant et son abscisse est positive : $\cos x = \frac{4}{5}$.

Les angles associés se lisent sur le cercle. Le point de $\pi - x$ est le symétrique de celui de x par rapport à l'axe des ordonnées : $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{4}{5}$. Le point de $\pi + x$ est le symétrique par rapport à l'origine : $\sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{3}{5}$. Le point de $\frac{\pi}{2} - x$ est le symétrique par rapport à la droite $y = x$, qui échange abscisse et ordonnée : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \frac{3}{5}$.

On reconnaît le triangle rectangle de côtés 3, 4, 5 : x est l'angle opposé au côté 3.

Réponse. $\cos x = \frac{4}{5}$; $\cos(\pi - x) = -\frac{4}{5}$; $\sin(\pi + x) = -\frac{3}{5}$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 7 – Équation avec factorisation

— **Changement d'inconnue** : on pose $X = \cos x$, avec $X \in [-1\,;1]$:

$$2X^2 - X - 1 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{1 \pm 3}{4}$, soit $X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$.

— **Premier cas** : $\cos x = 1$ donne $x = 0$ (sur $[0\,;2\pi[$).

— **Second cas** : $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ donne $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$.

— **Solutions** :

$$S = \left\langle 0\,;\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right\rangle$$

— **Vérifications** : pour $x = 0$, $2 - 1 - 1 = 0$ ✓ ; pour $\cos x = -\frac{1}{2}$, $2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ ✓

— **Contrôle des valeurs admissibles** : les deux racines 1 et $-\frac{1}{2}$ appartiennent bien à $[-1\,;1]$ — si l'une valait 2, il faudrait l'écarter.

— **Factorisation directe** : $2X^2 - X - 1 = (X - 1)(2X + 1)$ ✓

Réponse. $S = \left\langle 0\,;\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right\rangle$.

Correction de l'exercice 8 – Inéquation trigonométrique

— **Valeur critique** : $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

— **Lecture sur le cercle** : $\cos x \geq \frac{1}{2}$ correspond aux points d'abscisse au moins $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire à l'**arc de droite** autour de $x = 0$.

— **Solution** :

$$S = \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right[$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôles** : $\cos 0 = 1 \geq \frac{1}{2}$ ✓ ; $\cos \pi = -1 < \frac{1}{2}$ (exclu) ✓ ; $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866 \geq \frac{1}{2}$ ✓

— **Amplitude totale** : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, soit **un tiers** du tour — cohérent avec un arc de 120° centré en 0.

— **Écriture sur** $]-\pi\,;\pi]$: la solution s'écrirait plus simplement $\left[-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right]$ — bien choisir son intervalle simplifie souvent la réponse.

— **Piège** : sur $[0\,;2\pi[$ la solution est en **deux morceaux**, car l'arc est coupé par l'origine de l'intervalle.

Réponse. $S = \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right[$.

Correction de l'exercice 9 – Simplification d'expression

— **Premier terme** : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

— **Deuxième terme** : $\sin(\pi - x) = \sin x$.

— **Troisième terme** : $\cos(-x) = \cos x$.

— **Somme** :

$$A = -\sin x + \sin x + \cos x = \cos x$$

— **Contrôle en** $x = 0$: $\cos\frac{\pi}{2} + \sin\pi + \cos 0 = 0 + 0 + 1 = 1 = \cos 0$ ✓

— **Contrôle en** $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos\pi + \sin\frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 + 0 = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ ✓

— **Contrôle en** $x = \frac{\pi}{4}$: $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ ✓

— **Justification du premier terme** : le point associé à $\frac{\pi}{2} + x$ s'obtient en tournant d'un quart de tour celui de x ; un quart de tour direct envoie le point $(\cos x\,;\sin x)$ sur $(-\sin x\,;\cos x)$, d'où $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

— **Conseil** : vérifier une simplification sur **deux ou trois valeurs particulières** est un réflexe qui détecte immédiatement une erreur de signe.

Réponse. $A = \cos x$.

Correction de l'exercice 10 – Une équation par changement d'inconnue

On pose $X = \sin x$, avec $X \in [-1\,;1]$. L'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$, de discriminant $9 - 8 = 1$ et de racines

$$X = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad X = \frac{3+1}{4} = 1$$

Les deux valeurs sont dans $[-1\,;1]$. On revient à x en lisant le cercle :

— $\sin x = 1$: un seul point, celui de $\frac{\pi}{2}$;

— $\sin x = \frac{1}{2}$: deux points, d'ordonnée $\frac{1}{2}$, associés à $\frac{\pi}{6}$ et à $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$$S = \left\langle \frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{6} \right\rangle$$

Vérification pour $x = \frac{\pi}{6}$: $2 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$. La factorisation $2X^2 - 3X + 1 = (2X - 1)(X - 1)$ confirme les racines.

Réponse. $S = \left\langle \frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{6} \right\rangle$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Valeurs exactes et triangle rectangle

a) Dans le triangle rectangle en C, l'hypoténuse est $[AB]$. Avec l'angle $\frac{\pi}{6}$ en A :

$$BC = AB\sin\frac{\pi}{6} = 8\times\frac{1}{2} = 4 \qquad AC = AB\cos\frac{\pi}{6} = 8\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Contrôle par Pythagore : $16 + 48 = 64 = AB^2$.

b) Dans le triangle ACH, rectangle en H, d'hypoténuse $AC = 4\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$ en A :

$CH = AC\sin\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$ et $AH = AC\cos\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$. On en déduit $HB = 8 - 6 = 2$.

Contrôle : $CH^2 = 12 = AH\times HB = 6\times 2$, relation classique dans un triangle rectangle.

Réponse. a) $BC = 4$, $AC = 4\sqrt{3}$; b) $CH = 2\sqrt{3}$, $AH = 6$.

Correction de l'exercice 12 – Signes selon le quadrant

On utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ (deuxième quadrant), le point associé est au-dessus de l'axe des abscisses, son ordonnée est positive :

$$\sin x = \frac{12}{13}$$

Les angles associés se lisent par symétrie : $\cos(-x) = \cos x = -\frac{5}{13}$;
$\sin(\pi - x) = \sin x = \frac{12}{13}$; $\cos(\pi + x) = -\cos x = \frac{5}{13}$.

Le point de $\pi + x$ est le symétrique de celui de x par rapport à l'origine. Celui de x a une abscisse négative et une ordonnée positive ; celui de $\pi + x$ a donc une abscisse positive et une ordonnée négative : il est dans le quatrième quadrant. On reconnaît le triplet 5, 12, 13 : $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

Réponse. $\sin x = \frac{12}{13}$; $\cos(-x) = -\frac{5}{13}$; $\sin(\pi - x) = \frac{12}{13}$; $\cos(\pi + x) = \frac{5}{13}$; quatrième quadrant.

Correction de l'exercice 13 – Les points images des multiples de π/4

a) Deux réels sont associés au même point lorsqu'ils diffèrent d'un multiple de $2\pi = \frac{8\pi}{4}$. Les réels $k\frac{\pi}{4}$ donnent donc 8 points distincts, pour $k = 0, 1, \ldots, 7$: les sommets d'un octogone régulier. Leurs coordonnées sont $(1\,;0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0\,;1)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(-1\,;0)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $(0\,;-1)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) On divise 2027 par 8 : $2027 = 8\times 253 + 3$. Donc

$$\frac{2027\pi}{4} = 253\times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$$

Le réel est associé au même point que $\frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, après 253 tours complets.

Réponse. a) 8 points (octogone régulier) ; b) le point de $\frac{3\pi}{4}$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Somme de cosinus sur un cercle

Le point associé à $\pi - a$ est le symétrique de celui de a par rapport à l'axe des ordonnées : $\cos(\pi - a) = -\cos a$. Or

$$\frac{6\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7} \qquad \frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$$

donc $\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$ et $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$. Les termes s'annulent deux à deux : $S = 0$, sans connaître aucun de ces cosinus.

De même, $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$, et le point associé à $\pi + a$ est le symétrique de celui de a par rapport à l'origine : $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$, donc $T = 0$. **Contrôle** à la calculatrice : $\cos\frac{\pi}{7} \approx 0{,}901$ et $\cos\frac{6\pi}{7} \approx -0{,}901$.

Réponse. $S = 0$ et $T = 0$ (termes opposés deux à deux).

Correction de l'exercice 15 – Modèle de marée

a) On remplace t et l'on utilise les valeurs remarquables : $h(0) = 4 + 2{,}5\sin 0 = 4$; $h(1) = 4 + 2{,}5\sin\frac{\pi}{6} = 4 + 1{,}25 = 5{,}25$; $h(3) = 4 + 2{,}5\sin\frac{\pi}{2} = 6{,}5$; $h(6) = 4 + 2{,}5\sin\pi = 4$; $h(9) = 4 + 2{,}5\sin\frac{3\pi}{2} = 1{,}5$.

b) Un sinus vaut au plus 1, donc $h(t) \le 4 + 2{,}5 = 6{,}5$ m. Cette valeur est atteinte quand $\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1$, c'est-à-dire pour $\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2}$ dans l'intervalle considéré, soit $t = 3$ h.

c) On cherche $\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{1{,}25}{2{,}5} = \frac{1}{2}$. Pour $t \in [0\,;12]$, $\frac{\pi t}{6} \in [0\,;2\pi]$; les points d'ordonnée $\frac{1}{2}$ du cercle sont associés à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$, d'où

$$t = 1 \qquad \text{et} \qquad t = 5$$

La hauteur vaut 5,25 m à 1 h et à 5 h, en montant puis en descendant de part et d'autre de la pleine mer de 3 h.

Réponse. a) 4 ; 5,25 ; 6,5 ; 4 ; 1,5 m ; b) 6,5 m à 3 h ; c) à 1 h et 5 h.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : triangle et Al-Kashi

a) **Théorème d'Al-Kashi** :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos B\hat{A}C = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$BC^2 = 74 - 35 = 39 \qquad \text{donc} \qquad BC = \sqrt{39} \approx 6{,}245$$

b) **Al-Kashi en** B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos A\hat{B}C$$

— $25 = 49 + 39 - 2 \times 7\sqrt{39} \times \cos A\hat{B}C$, soit $25 = 88 - 14\sqrt{39}\cos A\hat{B}C$.

— $14\sqrt{39}\cos A\hat{B}C = 63$, donc

$$\cos A\hat{B}C = \frac{63}{14\sqrt{39}} = \frac{9}{2\sqrt{39}} \approx 0{,}72058$$

— **Angle** : $A\hat{B}C \approx 43{,}90°$.

c) **Aire** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin B\hat{A}C = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15{,}155$$

— **Contrôle de la somme des angles** : $A\hat{C}B \approx 180 - 60 - 43{,}90 = 76{,}10°$.
— **Contrôle de l'aire par une autre base** :
$\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin A\hat{B}C = \frac{1}{2} \times 7 \times 6{,}245 \times 0{,}69337 \approx 15{,}155$ ✓
— **Cohérence** : le plus grand côté ($AB = 7$) fait bien face au plus grand angle ($A\hat{C}B \approx 76°$) ✓

Réponse. a) $BC = \sqrt{39} \approx 6{,}25$ · b) $\cos A\hat{B}C = \frac{9}{2\sqrt{39}} \approx 0{,}721$ · c) $A = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15{,}16$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).