

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : cercle, équations et formules d'addition

Trigonométrie — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cercle trigonométrique. Un réel x repère un point M du cercle de rayon 1 ; alors $\cos x$ est son abscisse et $\sin x$ son ordonnée. Deux réels repèrent le même point s'ils diffèrent d'un multiple de 2π .

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

Valeurs remarquables.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Angles associés.

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x & \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x & \sin(\pi - x) &= \sin x & \cos(\pi + x) &= -\cos x & \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

Équations de référence (sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi \\ \sin x &= \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi \end{aligned}$$

Formules d'addition.

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

Formules de duplication.

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Correction de l'exercice 1 - Mesure principale

- **Méthode** : on retire un multiple de 2π pour tomber dans $] - \pi ; \pi]$.
- **Premier angle** : $\frac{25\pi}{6} - 2\pi = \frac{25\pi - 12\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$, puis $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

$$\frac{25\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}$$
- **Deuxième angle** : $-\frac{17\pi}{4} + 4\pi = \frac{-17\pi + 16\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$.

$$-\frac{17\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}$$

- **Troisième angle** : $\frac{15\pi}{2} - 6\pi = \frac{15\pi - 12\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, qui n'est pas dans l'intervalle ; on retire encore 2π : $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{15\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$$

- **Contrôles** : $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi \checkmark$; $-\frac{17\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 4\pi \checkmark$; $\frac{15\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 8\pi \checkmark$

- **Vérification par les cosinus** : $\cos \frac{25\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \checkmark$ et $\cos \frac{15\pi}{2} = 0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \checkmark$

Réponse. $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Angles associés

- **Par les formules des angles associés** :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{1}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\cos(-x) = \cos x = \frac{1}{3} \quad \cos(\pi + x) = -\cos x = -\frac{1}{3}$$

- **Lecture sur le cercle** : $\pi - x$ est le symétrique de x par rapport à l'axe des **ordonnées** — l'abscisse change de signe, l'ordonnée non.
- $-x$ est le symétrique par rapport à l'axe des **abscisses** — le cosinus est donc conservé.
- $\pi + x$ est le symétrique par rapport à l'**origine** — les deux coordonnées changent de signe.
- **Valeur du sinus** : $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, donc $\sin x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx \pm 0,9428$ — le signe dépend du **quadrant**, non déterminé ici.
- **Contrôle numérique** : $\cos x = \frac{1}{3}$ correspond à $x \approx 1,2310$ rad, et $\cos(\pi - x) = \cos(1,9106) \approx -0,3333 \checkmark$

Réponse. $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 3 - Équation en cosinus

- **Valeur de référence** : $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- **Solutions générales** :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- **Sur $[0; 2\pi[$** : la première famille donne $\frac{\pi}{4}$; la seconde, avec $k = 1$, donne $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

- **Contrôles** : $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark$

- **Valeurs numériques** : $\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$ et $\frac{7\pi}{4} \approx 5,4978$, tous deux dans $[0; 2\pi[\approx [0; 6,2832[\checkmark$

- **Lecture géométrique** : la droite verticale $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ coupe le cercle en **deux** points symétriques par rapport à l'axe des abscisses — d'où les deux solutions par tour.
- **Piège** : oublier la solution $-\frac{\pi}{4}$ ne donnerait que la moitié des réponses.

Réponse. $S = \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$ sur $[0; 2\pi[$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 - Équation en sinus

- **Valeur de référence** : $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
- **Solutions générales** :

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$
- **Sur $] -\pi; \pi]$** : la première famille donne $-\frac{\pi}{6}$; la seconde, avec $k = -1$, donne $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

$$S = \left\langle -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right\rangle$$

- **Contrôles** : $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2} \checkmark$
- **Valeurs numériques** : $-\frac{5\pi}{6} \approx -2,618$ et $-\frac{\pi}{6} \approx -0,5236$, tous deux dans $] -\pi; \pi]$ $\checkmark$
- **Lecture géométrique** : la droite horizontale $Y = -\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points du **demi-plan inférieur**, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées $\checkmark$
- **Cohérence** : les deux solutions vérifient $x_1 + x_2 = -\pi$, ce qui traduit exactement la relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ transposée sur cet intervalle.

Réponse. $S = \left\langle -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 5 - Formule d'addition

- **Décomposition** : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
- **Formule de soustraction** :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4}$$
- **Calcul** :

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$
- **Valeur numérique** : $\frac{1,41421 + 2,44949}{4} \approx 0,96593$.
- **Contrôle à la calculatrice** : $\cos(0,261799) \approx 0,96593 \checkmark$
- **Contrôle de cohérence** : $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ est un petit angle, donc son cosinus doit être proche de 1 $\checkmark$
- **Autre décomposition** : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ donne $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \checkmark$ — même résultat, bonne vérification.
- **Au passage** : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,25882$.

Réponse. $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0,9659$.

Correction de l'exercice 6 - Formule de duplication

— **Cosinus** : $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, et $\cos x > 0$ sur cet intervalle, donc

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

— **Sinus du double** :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} = 0,96$$

— **Cosinus du double** :

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25} = 0,28$$

— **Contrôle par l'autre formule** : $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25} \checkmark$

— **Contrôle de l'identité fondamentale** : $\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{576+49}{625} = \frac{625}{625} = 1 \checkmark$

— **Valeurs numériques** : $x \approx 0,6435$ rad, donc $2x \approx 1,2870$ rad, et $\sin(1,2870) \approx 0,96 \checkmark$

— **Remarque** : on reconnaît le triangle 3-4-5 ; $2x \approx 73,74^\circ$ reste dans le premier quadrant, ce qui est cohérent avec $\cos 2x > 0$.

Réponse. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin 2x = \frac{24}{25}$, $\cos 2x = \frac{7}{25}$.

Correction de l'exercice 7 - Équation avec factorisation

— **Changement d'inconnue** : on pose $X = \cos x$, avec $X \in [-1; 1]$:

$$2X^2 - X - 1 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{1 \pm 3}{4}$, soit $X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$.

— **Premier cas** : $\cos x = 1$ donne $x = 0$ (sur $[0; 2\pi[$).

— **Second cas** : $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$ donne $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$.

— **Solutions** :

$$S = \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$$

— **Vérifications** : pour $x = 0$, $2 - 1 - 1 = 0 \checkmark$; pour $\cos x = -\frac{1}{2}$,

$$2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \checkmark$$

— **Contrôle des valeurs admissibles** : les deux racines 1 et $-\frac{1}{2}$ appartiennent bien à $[-1; 1]$ — si l'une valait 2, il faudrait l'écartier.

— **Factorisation directe** : $2X^2 - X - 1 = (X - 1)(2X + 1) \checkmark$

Réponse. $S = \left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$.

Correction de l'exercice 8 - Inéquation trigonométrique

— **Valeur critique** : $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

— **Lecture sur le cercle** : $\cos x \geq \frac{1}{2}$ correspond aux points d'abscisse au moins $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire à l'**arc de droite** autour de $x = 0$.

— **Solution** :

$$S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right[$$

- **Contrôles** : $\cos 0 = 1 \geq \frac{1}{2} \checkmark$; $\cos \pi = -1 < \frac{1}{2}$ (exclu) $\checkmark$; $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 \geq \frac{1}{2} \checkmark$
- **Amplitude totale** : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, soit **un tiers** du tour — cohérent avec un arc de 120° centré en 0.
- **Écriture sur $] - \pi; \pi]$** : la solution s'écrirait plus simplement $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ — bien choisir son intervalle simplifie souvent la réponse.
- **Piège** : sur $[0; 2\pi[$ la solution est en **deux morceaux**, car l'arc est coupé par l'origine de l'intervalle.

Réponse. $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right[$.

Correction de l'exercice 9 - Simplification d'expression

- **Premier terme** : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.
- **Deuxième terme** : $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- **Troisième terme** : $\cos(-x) = \cos x$.
- **Somme** :

$$A = -\sin x + \sin x + \cos x = \cos x$$

- **Contrôle en $x = 0$** : $\cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi + \cos 0 = 0 + 0 + 1 = 1 = \cos 0 \checkmark$
- **Contrôle en $x = \frac{\pi}{2}$** : $\cos \pi + \sin \frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 + 0 = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \checkmark$
- **Contrôle en $x = \frac{\pi}{4}$** : $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \checkmark$
- **Démonstration du premier terme** :
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x - \sin \frac{\pi}{2} \sin x = 0 - \sin x = -\sin x \checkmark$
- **Conseil** : vérifier une simplification sur **deux ou trois valeurs particulières** est un réflexe qui détecte immédiatement une erreur de signe.

Réponse. $A = \cos x$.

Correction de l'exercice 10 - Équation à double argument

- **Duplication** : $2 \sin x \cos x = \sin x$, soit $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$.
- **Premier facteur** : $\sin x = 0$ donne $x = 0$ ou $x = \pi$.
- **Second facteur** : $\cos x = \frac{1}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.
- **Solutions** :

$$S = \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

- **Vérifications** : pour $x = \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \checkmark$
- Pour $x = \pi$, $\sin 2\pi = 0 = \sin \pi \checkmark$
- Pour $x = \frac{5\pi}{3}$, $\sin \frac{10\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$
- **Erreur à éviter absolument** : diviser par $\sin x$ ferait perdre les solutions 0 et π . On **factorise**, on ne divise jamais par une quantité pouvant s'annuler.

- **Contrôle du compte** : quatre solutions sur un tour, ce qui est cohérent avec une équation mêlant les périodes 2π et π .

Réponse. $S = \left\langle 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 11 - Valeur exacte par duplication

- **Choix de a** : avec $a = \frac{\pi}{8}$, on a $2a = \frac{\pi}{4}$, donc

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$$

- **Résolution** : $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, donc

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

- **Signe** : $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, donc son cosinus est **positif** :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

- **Valeur numérique** : $\sqrt{2 + 1,41421} = \sqrt{3,41421} \approx 1,84776$, donc $\cos \frac{\pi}{8} \approx 0,92388$.

- **Contrôle** : $\cos(0,39270) \approx 0,92388$ ✓

- **Cohérence** : $\frac{\pi}{8} = 22,5^\circ$, entre 0° et $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, donc $\cos \frac{\pi}{8}$ doit être compris entre $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ et 1 ✓

- **Au passage** : $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx 0,38268$, et la somme des carrés vaut $\frac{2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{4} = 1$ ✓

Réponse. $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \approx 0,9239$.

Correction de l'exercice 12 - Signes selon le quadrant

- **Sinus** : $\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$.

- **Signe** : sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ (deuxième quadrant), le sinus est **positif**, donc

$$\sin x = \frac{12}{13}$$

- **Sinus du double** :

$$\sin 2x = 2 \times \frac{12}{13} \times \left(-\frac{5}{13} \right) = -\frac{120}{169} \approx -0,7101$$

- **Contrôle du signe** : $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ donne $2x \in]\pi; 2\pi[$, où le sinus **peut** être négatif ✓

- **Précision** : $x \approx 1,9656$ rad, donc $2x \approx 3,9312$ rad, dans $]\pi; \frac{3\pi}{2}[$ — troisième quadrant, sinus négatif ✓

- **Contrôle numérique** : $\sin(3,9312) \approx -0,7101$ ✓

- **Au passage** : $\cos 2x = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50 - 169}{169} = -\frac{119}{169} \approx -0,7041$, également négatif — cohérent avec le troisième quadrant ✓

- **Triangle remarquable** : on reconnaît le triplet 5-12-13.

Réponse. $\sin x = \frac{12}{13}$ et $\sin 2x = -\frac{120}{169} \approx -0,710$.

Correction de l'exercice 13 - Périodicité et courbe

— **Amplitude** : 3 — la fonction varie entre -3 et 3 .

— **Période** : le coefficient de x vaut 2, donc

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

— **Maximum** : atteint quand $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, soit $2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$.

— **Résolution** : $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, donc $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

— **Sur** $[0; \pi]$: seule la valeur $x = \frac{\pi}{6}$ convient ($k = 0$), car $k = 1$ donnerait $\frac{7\pi}{6} > \pi$.

— **Contrôle** : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos 0 = 3 \checkmark$

— **Minimum** : quand $2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, soit $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$; sur $[0; \pi]$, $x = \frac{2\pi}{3}$, avec $f = -3 \checkmark$

— **Vérification de l'écart** : $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, exactement une **demi-période** — cohérent avec l'alternance maximum/minimum $\checkmark$

— **Valeur initiale** : $f(0) = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = 1,5$.

Réponse. Amplitude 3, période π , maximum en $x = \frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 14 - Somme de cosinus

Démonstration. En additionnant les deux formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

— Les termes en $\sin a \sin b$ se **compensent**, il reste

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

Application. On cherche a et b tels que $a+b = \frac{5\pi}{12}$ et $a-b = \frac{\pi}{12}$.

— **Somme** : $2a = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$, donc $a = \frac{\pi}{4}$.

— **Différence** : $2b = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$, donc $b = \frac{\pi}{6}$.

— **Calcul** :

$$\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

— **Valeur numérique** : $\frac{2,44949}{2} \approx 1,22474$.

— **Contrôle direct** : $\cos \frac{5\pi}{12} \approx 0,25882$ et $\cos \frac{\pi}{12} \approx 0,96593$, de somme 1,22475 $\checkmark$

— **Remarque** : $\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$, car $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ — les deux angles sont **complémentaires** $\checkmark$

Réponse. $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,2247$.

Correction de l'exercice 15 - Modèle de marée

- **Hauteur maximale** : $4 + 2,5 = 6,5$ m, atteinte quand $\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1$, soit $\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2}$ et $t = 3$ h.
- **Hauteur minimale** : $4 - 2,5 = 1,5$ m, atteinte pour $t = 9$ h.
- **Période** : $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ h — un cycle de marée par demi-journée.
- **Condition** : $4 + 2,5 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) > 5,25$ équivaut à $\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) > \frac{1,25}{2,5} = \frac{1}{2}$.
- **Résolution** : $\frac{\pi t}{6} \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right[$, donc

$$t \in]1; 5[$$
- **Contrôles** : $h(1) = 4 + 2,5 \times 0,5 = 5,25$ ✓ (borne) et $h(5) = 4 + 2,5 \sin \frac{5\pi}{6} = 5,25$ ✓
- **Contrôle intérieur** : $h(3) = 6,5 > 5,25$ ✓ ; **extérieur** : $h(0) = 4 < 5,25$ ✓
- **Durée** : la fenêtre favorable dure **4 heures**, centrée sur la pleine mer de 3 h ✓
- **Usage** : un navire ayant besoin de 5,25 m de tirant d'eau ne peut entrer qu'entre 1 h et 5 h (puis entre 13 h et 17 h, par périodicité).

Réponse. Maximum 6,5 m à $t = 3$ h, période 12 h, hauteur $> 5,25$ m pour $t \in]1; 5[$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : triangle et Al-Kashi

a) **Théorème d'Al-Kashi** :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{BAC} = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$BC^2 = 74 - 35 = 39 \quad \text{donc} \quad BC = \sqrt{39} \approx 6,245$$

b) **Al-Kashi en B** :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \hat{ABC}$$

$$25 = 49 + 39 - 2 \times 7 \times \sqrt{39} \times \cos \hat{ABC}, \text{ soit } 25 = 88 - 14\sqrt{39} \cos \hat{ABC}.$$

$$14\sqrt{39} \cos \hat{ABC} = 63, \text{ donc}$$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{63}{14\sqrt{39}} = \frac{9}{2\sqrt{39}} \approx 0,72058$$

$$\text{— Angle : } \hat{ABC} \approx 43,90^\circ.$$

c) **Aire** :

$$A = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{BAC} = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,155$$

$$\text{— Contrôle de la somme des angles : } \hat{ACB} \approx 180 - 60 - 43,90 = 76,10^\circ.$$

$$\text{— Contrôle par la loi des sinus : } \frac{BC}{\sin A} = \frac{6,245}{0,86603} \approx 7,2111 \text{ et}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{5}{0,69337} \approx 7,2112 \quad \checkmark$$

— **Contrôle de l'aire par une autre base** :

$$\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{ABC} = \frac{1}{2} \times 7 \times 6,245 \times 0,69337 \approx 15,155 \quad \checkmark$$

— **Cohérence** : le plus grand côté ($AB = 7$) fait bien face au plus grand angle ($\hat{ACB} \approx 76^\circ$) ✓

Réponse. a) $BC = \sqrt{39} \approx 6,25$ · b) $\cos \hat{ABC} = \frac{9}{2\sqrt{39}} \approx 0,721$ · c) $A = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,16$.