Plaquette 2 – Valeurs remarquables

Trigonométrie — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le tableau à connaître par cœur.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Moyen mnémotechnique. Les cosinus s'écrivent $\frac{\sqrt{4}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{0}}{2}$: les radicandes descendent de 4 à 0, et les sinus font l'inverse.

Les quatre symétries.

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Méthode en trois temps pour une valeur non remarquable :

- **1.** ramener à la mesure principale ;
- **2.** repérer le quadrant, donc les **signes** de cos et sin ;
- **3.** écrire l'angle sous la forme $\pi - x$, $\pi + x$ ou $-x$ avec x remarquable, puis appliquer la symétrie.

Lecture du cercle. Quand x augmente de 0 à π, le point associé parcourt le demi-cercle supérieur de droite à gauche : son abscisse $\cos x$ diminue. Plus l'angle est grand, plus le cosinus est petit.

En géométrie, dans un triangle rectangle : $\cos\hat{A} = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ et $\sin\hat{A} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

Correction de l'exercice 1 – Le tableau de base

On lit le tableau des valeurs remarquables :

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

a) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

b) $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$: c'est le seul angle où les deux coïncident.

c) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: c'est l'inverse de $\frac{\pi}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Contrôle de cohérence. Le cosinus **décroît** de 1 à 0 quand l'angle passe de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et le sinus croît de 0 à 1 : les valeurs trouvées respectent bien cet ordre.

Réponse. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$ — b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ — c) $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ — d) 0 et 1.

Correction de l'exercice 2 – Passer au deuxième quadrant

On écrit chaque angle sous la forme $\pi - x$ avec x remarquable, puis on applique :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

— **Pour** $\frac{2\pi}{3}$: $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

— **Pour** $\frac{3\pi}{4}$: $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$, donc

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Contrôle par le quadrant. Les deux angles sont dans le deuxième quadrant : cosinus négatif, sinus positif ✓ — c'est exactement ce qu'on obtient.

Sur la figure, les deux points ont la même hauteur et des abscisses opposées : la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées se voit directement.

Réponse. $-\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Des angles négatifs

On utilise les formules des angles opposés :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

b) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$. Or $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

— Finalement $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Attention au c). Deux symétries s'enchaînent : d'abord l'opposé, puis le supplémentaire. On traite une transformation à la fois, en vérifiant à chaque étape le quadrant obtenu.

Réponse. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ — b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ — c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 4 – Une expression à calculer

On remplace chaque terme par sa valeur remarquable :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Troisième terme** : $\cos^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, donc $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$.

— **Somme** :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

Contrôle à la calculatrice : $0{,}5 + 0{,}5 - 2 \times 0{,}5 = 0$ ✓

Notation à connaître. $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$, et non $\cos\left(x^2\right)$: on élève au carré le **résultat** du cosinus.

Réponse. $A = 0$.

Correction de l'exercice 5 – Vérifier la relation fondamentale

Pour $x = \frac{\pi}{6}$: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Pour $x = \frac{3\pi}{4}$: $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

Dans les deux cas la relation est vérifiée.

Pourquoi elle est toujours vraie. Le point image appartient au cercle de rayon 1 : la relation n'est rien d'autre que $OM^2 = 1$, écrite avec le théorème de Pythagore.

Utilité pratique. Le carré efface les signes : c'est pour cela que la relation seule ne suffit jamais à déterminer un sinus, il faut aussi connaître le quadrant.

Réponse. $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ✓

Correction de l'exercice 6 – Les quatre points d'une même famille

Les quatre points ont la **même distance aux axes** : seuls les signes changent d'un quadrant à l'autre.

— $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$: deuxième quadrant, cos < 0, sin > 0 ;

— $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$: troisième quadrant, les deux négatifs ;

— $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, de même point image que $-\frac{\pi}{6}$: quatrième quadrant, cos > 0, sin < 0.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Ce qu'il faut retenir. Une seule valeur remarquable à mémoriser, quatre points sur le cercle : la trigonométrie tient dans le premier quadrant plus les symétries.

Réponse. cos = $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ et sin = $\pm\frac{1}{2}$, avec les signes du quadrant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Comparer sans calculatrice

L'outil : la lecture du cercle. Quand un angle augmente de 0 à π, son point image parcourt le demi-cercle supérieur de droite à gauche, et son abscisse diminue :

$$0 \leq a < b \leq \pi \Longrightarrow \cos a > \cos b$$

— **On range d'abord les angles.** En les mettant sur le dénominateur commun 15 :

$$\frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{15} \qquad \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{15} \qquad \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{15}$$

— Donc $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5}$, et tous appartiennent à $[0\,;\pi]$.

— **On applique cette propriété** : l'ordre des cosinus est **inversé**.

$$\cos\frac{2\pi}{5} < \cos\frac{\pi}{3} < \cos\frac{\pi}{5}$$

— **Contrôle à la calculatrice** : $\cos\frac{2\pi}{5} \approx 0{,}31$, $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$ et $\cos\frac{\pi}{5} \approx 0{,}81$ ✓

Sur le cercle. Plus l'angle grandit de 0 à π, plus le point image se décale vers la gauche : son abscisse, donc le cosinus, diminue.

Réponse. $\cos\frac{2\pi}{5} < \cos\frac{\pi}{3} < \cos\frac{\pi}{5}$.

Correction de l'exercice 8 – Le troisième quadrant

Les formules du demi-tour :

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

— **Premier calcul** : $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, donc

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

— **Second calcul** : $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, donc

$$\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

— **Contrôle par le quadrant** : les deux angles sont dans le troisième quadrant, où cosinus et sinus sont négatifs ✓

Interprétation géométrique. Ajouter π revient à faire un **demi-tour** : le point image devient le symétrique par rapport au centre O, et ses deux coordonnées changent de signe.

Réponse. $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – Les angles complémentaires

a) Les coordonnées sont :

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right) \qquad B\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

— Les deux coordonnées sont **échangées** : l'abscisse de l'un est l'ordonnée de l'autre.

— b) Comme $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$, l'observation suggère :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Justification géométrique.** Les points images de x et de $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à la **première bissectrice** (la droite d'équation $y = x$), et cette symétrie échange abscisse et ordonnée.

Vocabulaire. Deux angles de somme $\frac{\pi}{2}$ sont dits **complémentaires** : le cosinus de l'un est le sinus de l'autre. C'est la version « radians » de ce qu'on apprend en Troisième dans le triangle rectangle.

Réponse. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Correction de l'exercice 10 – Simplifier une expression

On traite chaque terme avec la symétrie correspondante :

— $\cos(\pi - x) = -\cos x$;

— $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;

— $\cos(-x) = \cos x$;

— $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

On additionne :

$$B = -\cos x + \cos x + \cos x - \sin x = \cos x - \sin x$$

— **Contrôle avec** $x = 0$: l'expression de départ vaut $\cos\pi + \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 + \sin\pi = -1 + 1 + 1 + 0 = 1$, et $\cos 0 - \sin 0 = 1$ ✓

— **Contrôle avec** $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos\frac{\pi}{2} + \sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = 0 + 0 + 0 - 1 = -1$, et $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -1$ ✓

Méthode. Une expression à simplifier se traite **terme à terme**, jamais globalement : on identifie la forme ($-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$), on applique, puis on réduit.

Réponse. $B = \cos x - \sin x$.

Correction de l'exercice 11 – Démontrer une valeur remarquable

Le triangle OHM est rectangle isocèle. L'angle en O vaut $\frac{\pi}{4}$, soit 45°, et l'angle en H est droit : le troisième angle vaut donc aussi 45°. Le triangle est isocèle en H, d'où

$$OH = HM \quad \text{c'est-à-dire} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$$

On utilise la relation fondamentale :

$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$$

— En remplaçant sin par cos : $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$, donc $\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

— Donc $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; comme $\frac{\pi}{4}$ est dans le premier quadrant, le cosinus est **positif**.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

— **Dernière étape** : on a multiplié numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}$ pour supprimer le radical du dénominateur.

Réponse. $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$, d'où $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Le toit de la véranda

Dans le triangle rectangle, l’hypoténuse est la poutre (4 m) et l’angle connu vaut $\frac{\pi}{6}$.

$$\sin\hat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \cos\hat{A} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

— **Hauteur** : $h = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ m exactement.

— **Portée horizontale** :

$$d = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ \text{m}$$

— Valeur approchée : $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ m, soit 3 m 46 cm.

— **Contrôle par Pythagore** : $2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 12 = 16 = 4^2$ ✓

À retenir. Un angle de 30° donne une hauteur égale à **la moitié** de l’hypoténuse : c’est la valeur remarquable la plus utile en géométrie.

Réponse. $h = 2$ m et $d = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ m.

Correction de l’exercice 13 – Un losange et ses diagonales

Les diagonales d’un losange se coupent **perpendiculairement en leur milieu**, et chacune est **bissectrice** d’un angle.

— Le demi-angle vaut $\frac{\pi}{6}$, et chaque demi-diagonale est un côté du triangle rectangle d’hypoténuse 6 cm.

— **Demi-petite diagonale** : elle est opposée à l’angle $\frac{\pi}{6}$.

$$6\sin\frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

— **Demi-grande diagonale** : elle est adjacente à cet angle.

$$6\cos\frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

— **Diagonales complètes** : $2 \times 3 = 6$ cm et $2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm.

— **Contrôle** : dans le demi-triangle, $3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 27 = 36 = 6^2$ ✓

Remarque. Un losange d’angle $\frac{\pi}{3}$ est formé de **deux triangles équilatéraux** : c’est pourquoi la petite diagonale mesure exactement 6 cm, la longueur du côté.

Réponse. Diagonales de 6 cm et $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm.

Correction de l’exercice 14 – Reconnaître un angle remarquable

Cosinus imposé. Le cosinus est l’**abscisse** du point image : les points d’abscisse $\frac{1}{2}$ sont **deux** points symétriques par rapport à l’axe des abscisses.

— La valeur remarquable est $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

— Le second point correspond à l’angle opposé, puisque $\cos(-x) = \cos x$:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

Sinus imposé. Le sinus est l’**ordonnée** : les points d’ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont symétriques par

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

rapport à l'axe des ordonnées.

— La valeur remarquable est $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, et le second point correspond au supplémentaire, car $\sin(\pi-x)=\sin x$:

$$x=\frac{\pi}{3}\quad\text{ou}\quad x=\frac{2\pi}{3}$$

La différence à retenir. Un cosinus imposé donne deux angles **opposés** ; un sinus imposé donne deux angles **supplémentaires**.

Réponse. $\cos x=\frac{1}{2}$: $x=\pm\frac{\pi}{3}$ — $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$: $x=\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un tour complet

a) On ajoute des tours, avec $2\pi=\frac{8\pi}{4}$:

$$-\frac{11\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$$

— Cette valeur appartient à $]-\pi\,;\pi]$: c'est la mesure principale.

— b) $-\frac{3\pi}{4}$ est dans le troisième quadrant (cosinus et sinus négatifs). Comme $-\frac{3\pi}{4}=-\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) On applique les symétries à partir de ces valeurs :

$$\cos(\pi-x)=-\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

— **Contrôle** : $\cos^2 x+\sin^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ ✓

Bilan. Trois réflexes suffisent : ramener à la mesure principale, repérer le quadrant pour les signes, appliquer la symétrie pour la valeur.

Réponse. a) $-\frac{3\pi}{4}$ — b) $\cos x=\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ — c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).