

Plaquette 3 - Équations trigonométriques

Trigonométrie — Première spé maths

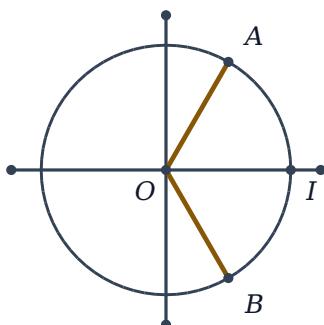
Exercices

Méthode

Résoudre $\cos x = a$ ou $\sin x = a$, c'est chercher les **points du cercle** dont l'abscisse ou l'ordonnée vaut a : il y en a en général **deux** par tour. On apprend à les trouver, à les écrire avec $2k\pi$, à traiter les équations du type $\cos(2x) = a$, et à résoudre une inéquation.

Exercice 1 - Première équation en cosinus

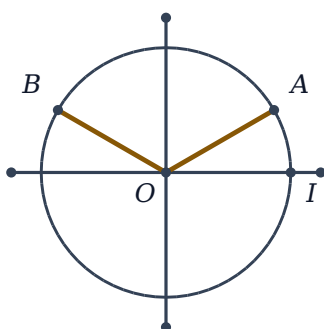
Déterminer tous les réels de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$.



Les points d'abscisse $\frac{1}{2}$

Exercice 2 - Première équation en sinus

Quels sont les réels de $]-\pi; \pi]$ dont le sinus est égal à $\frac{1}{2}$? Justifier à l'aide du cercle.



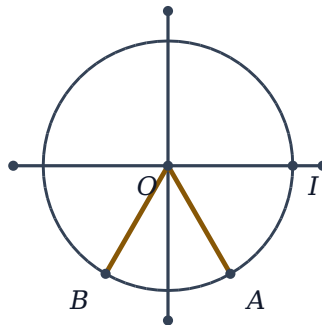
Les points d'ordonnée $\frac{1}{2}$

Exercice 3 - Avec un second membre négatif

On cherche les réels x de $]-\pi; \pi]$ vérifiant l'égalité $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les déterminer en précisant l'angle de référence utilisé.

Exercice 4 - Un sinus négatif

Un point du cercle a pour ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donner toutes les mesures possibles, comprises entre $-\pi$ et π , de l'angle correspondant.



Les points d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 5 - Les cas particuliers

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$.

- a) $\cos x = 0$
- b) $\sin x = 0$
- c) $\cos x = 1$
- d) $\sin x = -1$

Exercice 6 - Quand il n'y a pas de solution

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

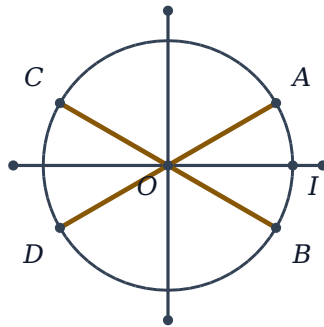
- a) $\cos x = 2$
- b) $3 \sin x = 4$
- c) $2 \cos x + 1 = 0$

Exercice 7 - Écrire toutes les solutions

Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$, puis donner les solutions appartenant à $[0; 2\pi]$.

Exercice 8 - Une équation où l'angle est doublé

L'inconnue est cette fois placée dans un angle double. Résoudre, sur $] -\pi ; \pi]$, l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$, et compter les solutions obtenues.



Les quatre solutions dans $] -\pi ; \pi]$

Exercice 9 - Une équation avec un décalage

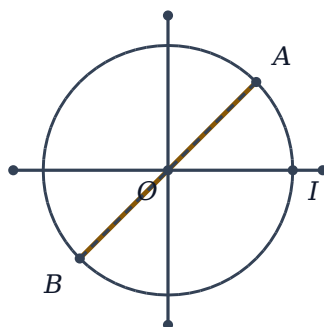
Résoudre $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ dans $\mathbb{R}$, puis donner la solution de $] -\pi ; \pi]$.

Exercice 10 - Une équation du second degré déguisée

Voici une équation du second degré déguisée : $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. La résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ en posant un changement d'inconnue.

Exercice 11 - Cosinus égal au sinus

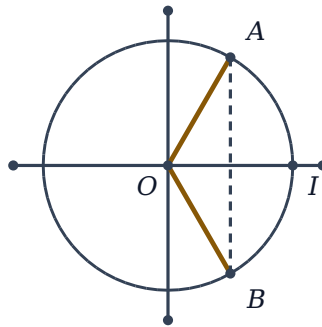
Pour quels réels de $] -\pi ; \pi]$ le cosinus et le sinus sont-ils égaux ? Répondre en interprétant la question sur le cercle, puis par le calcul.



Les points où l'abscisse égale l'ordonnée

Exercice 12 - Une inéquation en cosinus

Déterminer l'ensemble des réels de $] -\pi ; \pi]$ pour lesquels l'abscisse du point image est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire résoudre $\cos x \geq \frac{1}{2}$.



L'arc où l'abscisse dépasse $\frac{1}{2}$

Exercice 13 - Une inéquation en sinus

Sur quel arc du cercle l'ordonnée dépasse-t-elle strictement $\frac{\sqrt{2}}{2}$? Traduire la réponse par la résolution de $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$.

Exercice 14 - La hauteur de la marée

Dans un port, la hauteur d'eau en mètres est modélisée par $h(t) = 5 + 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, où t est le temps en heures, avec $0 \leq t \leq 12$.

- Quelle est la hauteur maximale ? À quel instant ?
- À quels instants la hauteur vaut-elle 6,5 m ?

Exercice 15 - Synthèse : équation à isoler

Résoudre $2 \sin x + 1 = 0$ dans $[0 ; 2\pi]$, puis donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.