

Plaquette 4 – Formules d'addition

Trigonométrie — Première spé maths

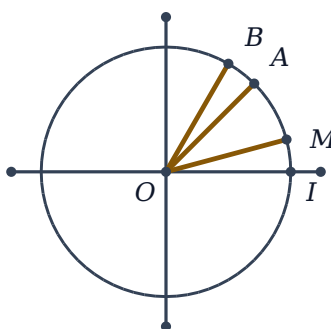
Exercices

Méthode

Quatre formules d'addition, deux formules de duplication : elles permettent de calculer des valeurs **exactes** hors du tableau remarquable — comme $\cos \frac{\pi}{12}$ —, de simplifier des expressions, et de transformer $a \cos x + b \sin x$ en un seul cosinus.

Exercice 1 – Le cosinus de l'angle de 15 degrés

Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.



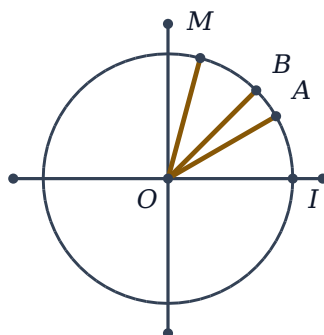
$\frac{\pi}{12}$ est la différence de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$

Exercice 2 – Le sinus du même angle

Calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$, puis vérifier la relation fondamentale avec le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 3 - Une somme d'angles

Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$ en écrivant $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$.



$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4 - Deux décompositions, un seul résultat

Calculer $\sin \frac{7\pi}{12}$ de deux façons : en écrivant $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, puis en utilisant $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 5 - Développer une expression

Développer et simplifier $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

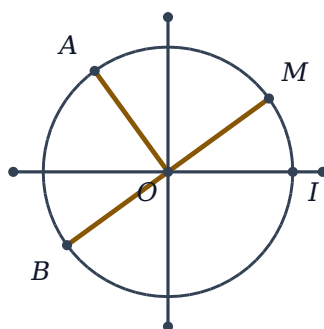
Exercice 6 - Des simplifications immédiates

Simplifier, pour tout réel x .

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\cos(x + \pi)$

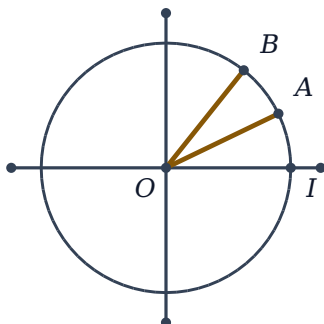
c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



Point image de x , puis de $x + \frac{\pi}{2}$ et de $x + \pi$

Exercice 7 - Démontrer la formule de duplication

À partir des formules d'addition, démontrer que $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ et que $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$.



Un angle a et son double $2a$

Exercice 8 - Doubler un angle connu

On donne $\cos a = \frac{3}{5}$ avec $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer $\sin a$, puis $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

Exercice 9 - Vérifier une identité

Démontrer que, pour tous réels a et b ,

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$$

Exercice 10 - Reconnaître une formule d'addition

Résoudre, dans $]-\pi; \pi]$, l'équation

$$\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Exercice 11 - Regrouper en une seule fonction

Démontrer que, pour tout réel x ,

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

puis en déduire le maximum de l'expression $\sqrt{3} \cos x + \sin x$.

Exercice 12 - Deux signaux qui s'additionnent

En électricité, deux tensions valent $u_1(t) = 3 \cos(\omega t)$ et $u_2(t) = 4 \sin(\omega t)$.

a) Écrire $u_1(t) + u_2(t)$ sous la forme $A \cos(\omega t - \varphi)$, où $A > 0$.

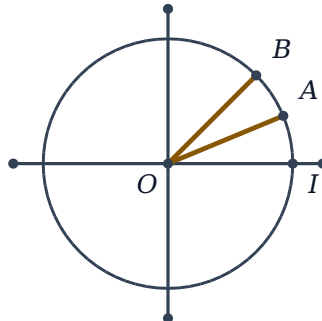
b) Quelle est l'amplitude de la tension totale ?

Exercice 13 - Le double d'un angle remarquable

On pose $a = \frac{\pi}{8}$.

a) Calculer $\cos(2a)$.

b) En déduire la valeur exacte de $\cos^2 \frac{\pi}{8}$, puis de $\cos \frac{\pi}{8}$.



$\frac{\pi}{4}$ est le double de $\frac{\pi}{8}$

Exercice 14 - Une équation avec duplication

Résoudre $\sin(2x) = \sin x$ dans $[0; 2\pi[$.

Exercice 15 - Synthèse : du calcul exact à l'équation

a) Calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ sans utiliser les valeurs trouvées précédemment.

b) En déduire $\sin \frac{\pi}{6}$ et vérifier la cohérence du résultat.