Plaquette 4 – Radians, cercle et triangle rectangle : applications

Trigonométrie — Première spé maths

Exercices

Méthode

On utilise le radian pour mesurer des **longueurs d'arc** et des rotations, on repère un point d'un cercle de rayon R par ses coordonnées $(R\cos\theta\,;R\sin\theta)$, on **démontre** les valeurs remarquables à l'aide de figures simples (carré, triangle équilatéral), et l'on fait le lien avec le cosinus et le sinus du triangle rectangle pour résoudre des problèmes concrets.

Exercice 1 – Longueur d'un arc

a) Sur un cercle de rayon 5 cm, quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle de $\dfrac{2\pi}{5}$ rad ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée.

b) Un arc de 12 cm est tracé sur un cercle de rayon 8 cm. Quelle est la mesure de l'angle correspondant, en radians puis en degrés (à l'unité près) ?

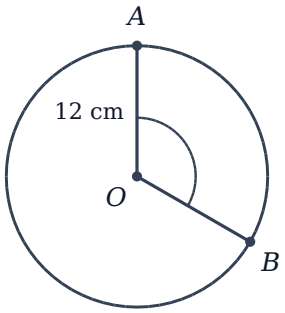
Exercice 2 – L'aiguille des minutes

L'aiguille des minutes d'une horloge mesure 12 cm.

a) De quel angle, en radians, tourne-t-elle en 20 minutes ? En 45 minutes ?

b) Quelle distance parcourt l'extrémité de l'aiguille en 20 minutes ?

c) Combien de temps faut-il pour que l'extrémité parcoure 10 cm ?

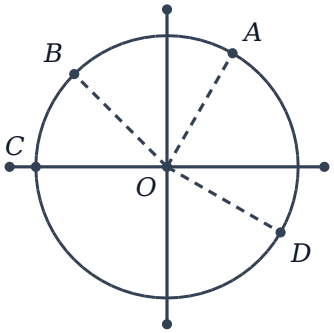


L'aiguille passe de A (12 h) à B (12 h 20)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Coordonnées d’un point sur un cercle

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle de centre O et de rayon 4. Donner les coordonnées exactes des points A, B, C et D de ce cercle associés aux angles $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, π et $-\frac{\pi}{6}$.



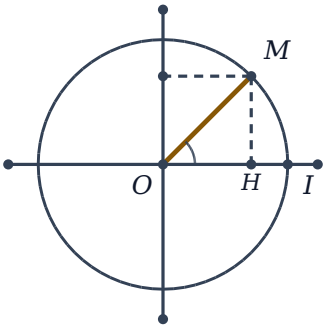
Le cercle de centre O et de rayon 4

Exercice 4 – Démontrer les valeurs en π/4

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{4}$, et H son projeté orthogonal sur l’axe des abscisses.

a) Justifier que le triangle OHM est rectangle isocèle.

b) En déduire que $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Le point M associé à $\frac{\pi}{4}$ et son projeté H

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

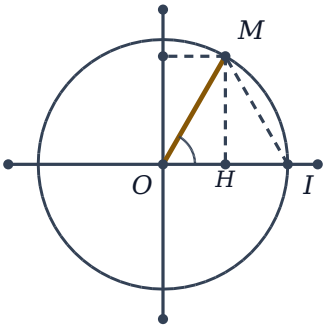
Exercice 5 – Démontrer les valeurs en π/3 et π/6

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$, $I(1\,;0)$, et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

a) Montrer que le triangle OIM est équilatéral, puis que H est le milieu de $[OI]$.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.

c) En utilisant la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, en déduire $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$.



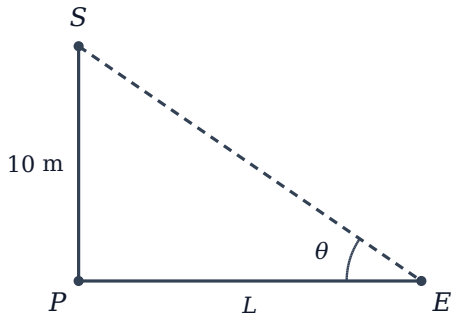
Le triangle OIM et le projeté H de M

Exercice 6 – La longueur d'une ombre

Un arbre de 10 m de haut, vertical, est éclairé par le soleil. On note θ l'angle que font les rayons avec le sol horizontal.

a) Exprimer la longueur L de l'ombre en fonction de θ, à l'aide du cosinus et du sinus.

b) Calculer la valeur exacte de L pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.



L'arbre [PS], son ombre [PE] et un rayon de soleil

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

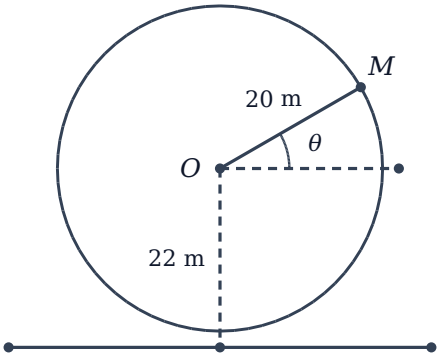
Exercice 7 – La grande roue

Une grande roue a un rayon de 20 m ; son centre O est à 22 m du sol. On repère une nacelle par l'angle θ que fait $[OM]$ avec l'horizontale, mesuré comme sur le cercle trigonométrique.

a) Montrer que la hauteur de la nacelle au-dessus du sol vaut $h = 22 + 20\sin\theta$.

b) Calculer la hauteur pour $\theta = 0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

c) Pour quels angles de $[0\,;2\pi[$ la nacelle est-elle à 32 m du sol ?



La grande roue et une nacelle M

Exercice 8 – Approcher π comme Archimède

On inscrit dans un cercle de rayon 1 un hexagone régulier, et on en circonscrit un autre.

a) Montrer que l'hexagone inscrit a pour côté 1, et que l'hexagone circonscrit a pour côté $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) En comparant les périmètres à celui du cercle, en déduire que $3 \le \pi \le 2\sqrt{3}$.

c) Archimède a doublé quatre fois le nombre de côtés, jusqu'à 96. Le programme suivant calcule les demi-périmètres des polygones à n côtés inscrit et circonscrit. Interpréter ses résultats.

```
from math import sin, tan, pi
for n in [6, 12, 24, 48, 96]:
    print(n, n * sin(pi / n), n * tan(pi / n))
```

Il affiche notamment, pour $n = 96$: 3,14103 et 3,14271.

Exercice 9 – Le point image d'un grand réel

a) Déterminer le point du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{47\pi}{6}$, en écrivant $\frac{47\pi}{6} = 8\pi + \alpha$ avec $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$.

b) En déduire $\cos\frac{47\pi}{6}$ et $\sin\frac{47\pi}{6}$.

c) Même question pour $-\frac{29\pi}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

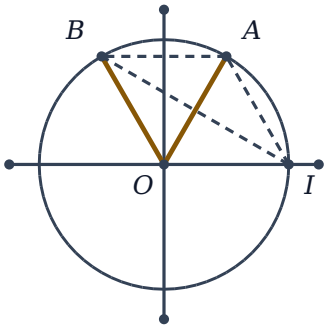
Exercice 10 – Cordes d'un cercle

Sur le cercle trigonométrique, on considère les points I, A et B associés à 0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

a) Donner les coordonnées de ces trois points.

b) Calculer les longueurs IA, AB et IB.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $OIAB$?



Les points I, A et B du cercle trigonométrique

Exercice 11 – Aire d'un triangle inscrit

Sur le cercle trigonométrique, on considère $I(1\,;0)$ et le point M associé à un réel $\theta \in [0\,;\pi]$.

a) Montrer que l'aire du triangle OIM vaut $\frac{1}{2}\sin\theta$.

b) Calculer cette aire pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

c) Pour quelle valeur de θ l'aire est-elle maximale ? Justifier par la lecture du cercle.

Exercice 12 – Vitesse angulaire

Un manège tourne à raison d'un tour toutes les 12 secondes. Un cheval de bois est placé à 3 m de l'axe, un autre à 5 m.

a) Quelle est la vitesse angulaire du manège, en radians par seconde ?

b) Quelle distance parcourt chaque cheval en une seconde ? en une minute ?

c) De quel angle le manège a-t-il tourné au bout de 2 s ? de 9 s ? Donner les mesures principales.

Exercice 13 – La pente d'une route

Une route rectiligne fait un angle θ avec l'horizontale. On parcourt 2 km sur cette route.

a) Exprimer le dénivelé (la hauteur gagnée) et le déplacement horizontal en fonction de θ.

b) Calculer leurs valeurs exactes pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) Les panneaux indiquent une « pente de 10 % » : on monte de 10 m pour 100 m

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

parcourus à l'horizontale. Pour une route à 10 %, la calculatrice donne $\theta \approx 0{,}0997$ rad. Quel dénivelé a-t-on gagné sur 2 km de route ? Comparer avec l'approximation $\sin\theta \approx \theta$.

Exercice 14 – Six points régulièrement espacés

On place sur le cercle trigonométrique les six points associés à 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

a) Quelle figure forment ces six points ?

b) Calculer la somme des cosinus de ces six réels, puis la somme de leurs sinus.

c) Interpréter géométriquement ces deux résultats.

Exercice 15 – Synthèse : un satellite en orbite

Un satellite décrit une orbite circulaire de rayon $R = 7\,000$ km autour du centre O de la Terre, en 100 minutes. On utilise un repère d'origine O, d'unité le kilomètre ; à $t = 0$, le satellite est au point $(7\,000\,;0)$ et tourne dans le sens direct.

a) Calculer sa vitesse angulaire en radians par minute, puis sa vitesse en km/h.

b) Quel angle a-t-il parcouru au bout de t minutes ? Donner les coordonnées exactes du satellite pour $t = 25$, $t = 50$ et $t = 100/12$ (en minutes).

c) Au bout de combien de minutes le satellite est-il, pour la première fois, au point associé à l'angle $\frac{3\pi}{4}$?

d) Quelle distance a-t-il parcourue en 3 heures ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).