Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cercle, angles associés et équations

Trigonométrie — Première spé maths

Exercices

Méthode

On place les angles sur le **cercle trigonométrique**, on utilise les **valeurs remarquables** et les **angles associés**, on résout des **équations** en cos et sin par lecture du cercle, et l'on relie le cercle au **triangle rectangle**.

Exercice 1 – Mesure principale

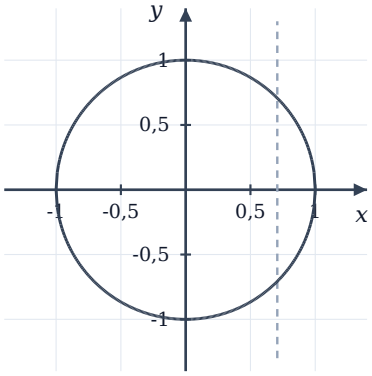
Déterminer la mesure principale (dans $]-\pi\,;\pi]$) des angles $\frac{25\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{4}$ et $\frac{15\pi}{2}$.

Exercice 2 – Angles associés

Sachant que $\cos x = \frac{1}{3}$, calculer $\cos(\pi - x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos(-x)$ et $\cos(\pi + x)$.

Exercice 3 – Équation en cosinus

Résoudre $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;2\pi[$, puis sur $\mathbb{R}$.

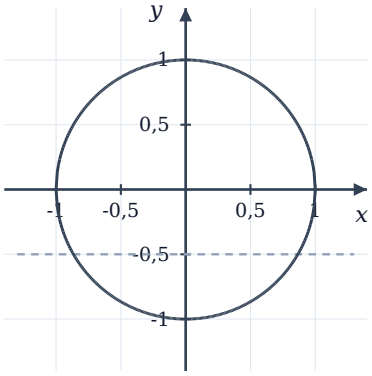


Cercle trigonométrique et droite d'équation x = √2/2

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Équation en sinus

Résoudre $\sin x = -\frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\pi]$.



Cercle trigonométrique et droite d'équation $y = -1/2$

Exercice 5 – Valeurs exactes en des angles non remarquables

Sans calculatrice, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\sin\frac{5\pi}{3}$ et $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, en justifiant par la lecture du cercle.

Exercice 6 – Du sinus au cosinus

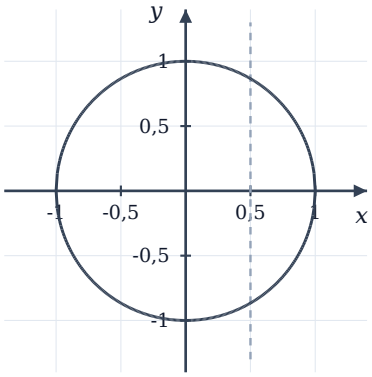
Sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$ avec $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, calculer $\cos x$, puis $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 7 – Équation avec factorisation

Résoudre $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ sur $[0\,;2\pi[$.

Exercice 8 – Inéquation trigonométrique

Résoudre $\cos x \geq \frac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi[$.



Cercle trigonométrique et droite d'équation $x = 1/2$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Simplification d'expression

Simplifier $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(\pi - x) + \cos(-x)$.

Exercice 10 – Une équation par changement d'inconnue

Résoudre sur $[0\,;2\pi[$ l'équation $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Exercice 11 – Valeurs exactes et triangle rectangle

Un triangle ABC est rectangle en C, avec $AB = 8$ et $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$.

a) Calculer les valeurs exactes de BC et AC.

b) Soit H le pied de la hauteur issue de C. Calculer CH et AH.

Exercice 12 – Signes selon le quadrant

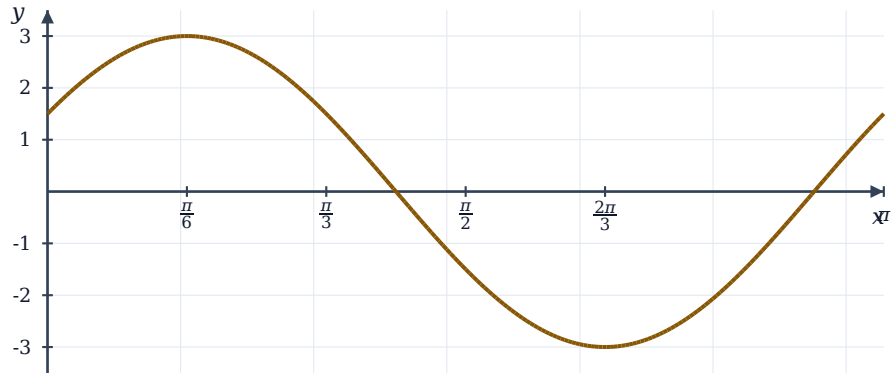
On sait que $\cos x = -\frac{5}{13}$ et que $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$. Calculer $\sin x$, puis $\cos(-x)$, $\sin(\pi - x)$ et $\cos(\pi + x)$. Dans quel quadrant se trouve le point associé à $\pi + x$?

Exercice 13 – Les points images des multiples de π/4

On enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique.

a) Combien de points distincts du cercle sont associés aux réels $k\frac{\pi}{4}$, k entier ? Donner leurs coordonnées.

b) À quel point est associé $\frac{2027\pi}{4}$?



Courbe de f sur [0 ; π]

Exercice 14 – Somme de cosinus sur un cercle

Calculer, sans calculatrice, $S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$, en associant les termes deux à deux par une symétrie du cercle. Faire de même pour $T = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

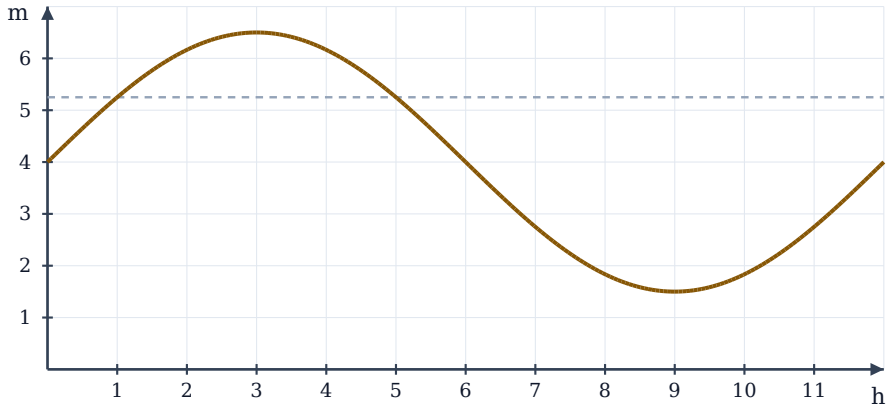
Exercice 15 – Modèle de marée

La hauteur d'eau dans un port, en mètres, est donnée à certaines heures par $h(t) = 4 + 2{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, où t est l'heure, $t \in [0\,;12]$.

a) Calculer $h(0)$, $h(1)$, $h(3)$, $h(6)$ et $h(9)$ (valeurs exactes).

b) Quelle est la hauteur maximale ? À quelle heure ?

c) À quelles heures entières de $[0\,;12]$ la hauteur vaut-elle exactement 5,25 m ?



Hauteur d'eau (m) en fonction de l'heure, et le niveau 5,25 m

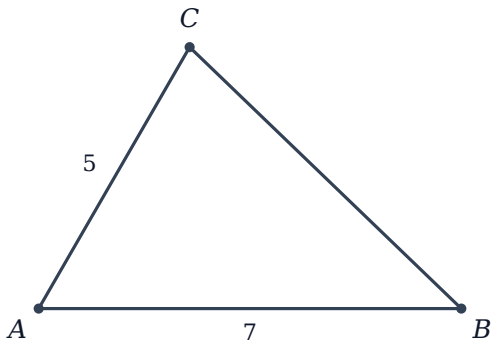
Exercice 16 – Synthèse : triangle et Al-Kashi

Dans un triangle ABC, $AB = 7$, $AC = 5$ et $B\hat{A}C = 60°$.

a) Calculer BC.

b) Calculer $\cos A\hat{B}C$.

c) Calculer l'aire du triangle.



Le triangle ABC, avec un angle de 60° en A

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).