Plaquette 2 – Valeurs remarquables

Trigonométrie — Première spé maths

Exercices

Méthode

Cinq valeurs à connaître par cœur — 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ — et quatre symétries pour en déduire **toutes** les autres. On s'entraîne à passer d'un quadrant à l'autre sans calculatrice, puis à s'en servir en géométrie.

Exercice 1 – Le tableau de base

Donner, sans calculatrice, les valeurs exactes suivantes.

a) $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$

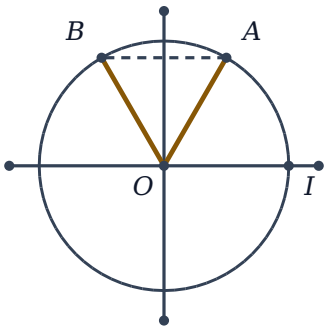
b) $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$

c) $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$

d) $\cos\frac{\pi}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 – Passer au deuxième quadrant

À l'aide des symétries, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{3\pi}{4}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}$.



$\frac{2\pi}{3}$ est le supplémentaire de $\frac{\pi}{3}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

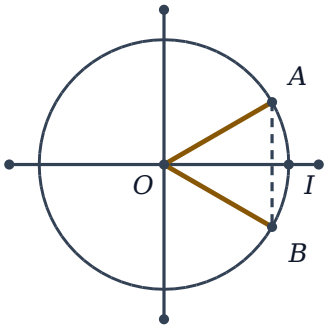
Exercice 3 – Des angles négatifs

Donner les valeurs exactes.

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$



$-\frac{\pi}{6}$ est le symétrique de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des abscisses

Exercice 4 – Une expression à calculer

Calculer la valeur exacte de

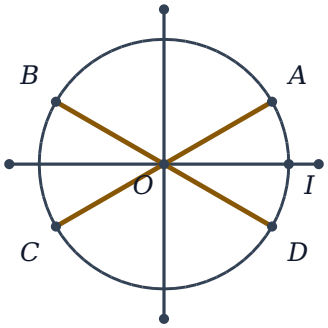
$$A = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} - 2\cos^2\frac{\pi}{4}$$

Exercice 5 – Vérifier la relation fondamentale

Vérifier que la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ est satisfaite pour $x = \frac{\pi}{6}$, puis pour $x = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 6 – Les quatre points d'une même famille

Donner les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$, puis présenter les résultats dans un tableau.



Les quatre points de la famille de $\frac{\pi}{6}$

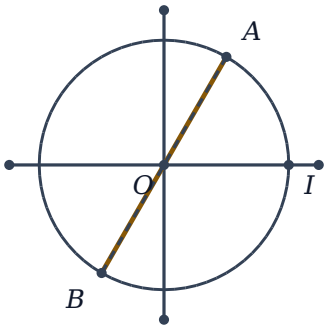
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Comparer sans calculatrice

Ranger dans l'ordre croissant les nombres $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$, sans calculatrice.

Exercice 8 – Le troisième quadrant

Calculer $\cos\frac{4\pi}{3}$ et $\sin\frac{7\pi}{6}$ en utilisant les formules de $\pi + x$.

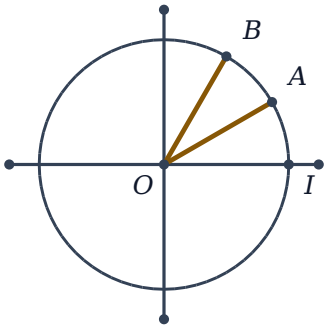


$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$: symétrie par rapport à O

Exercice 9 – Les angles complémentaires

a) Placer sur le cercle les points images de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{3}$, et observer leurs coordonnées.

b) En déduire, puis justifier, les formules donnant $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.



Points images de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$

Exercice 10 – Simplifier une expression

Simplifier, pour tout réel x, l'expression

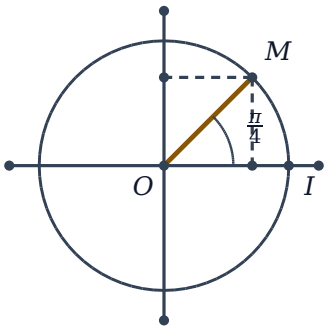
$$B = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \sin(\pi + x)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Démontrer une valeur remarquable

M est le point image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique, et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

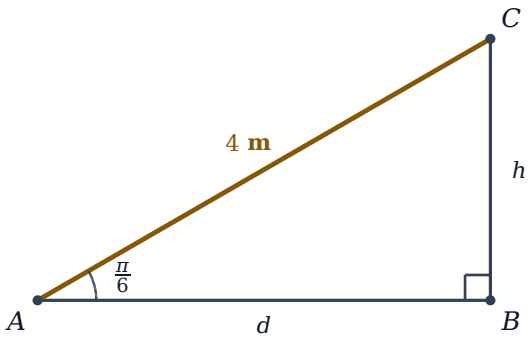
Démontrer que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Le triangle OHM est rectangle isocèle

Exercice 12 – Le toit de la véranda

Une poutre de 4 m forme un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec l'horizontale. Calculer la hauteur h atteinte et la longueur horizontale d couverte, en valeurs exactes puis arrondies au centimètre.



Poutre de 4 m inclinée de $\frac{\pi}{6}$

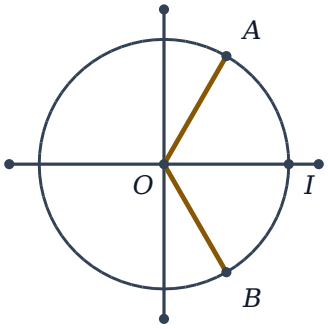
Exercice 13 – Un losange et ses diagonales

Un losange a des côtés de 6 cm et un angle de $\frac{\pi}{3}$. Calculer les longueurs exactes de ses deux diagonales.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Reconnaître un angle remarquable

Déterminer tous les réels x de $]-\pi\,;\pi]$ tels que $\cos x = \dfrac{1}{2}$, puis tous ceux tels que $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Les deux points de cosinus $\frac{1}{2}$

Exercice 15 – Synthèse : un tour complet

Soit $x = -\dfrac{11\pi}{4}$.

a) Donner la mesure principale de x.

b) En déduire $\cos x$ et $\sin x$ en valeurs exactes.

c) Calculer $\cos(\pi - x)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ à partir des résultats précédents.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).