MATHÉMATIQUES

Trigonométrie

Première spé maths

Cercle trigonométrique • Radian • Longueur d'arc • Enroulement de la droite
Cosinus et sinus d'un réel • Valeurs
remarquables • Angles associés • Archimède

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de première générale** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Analyse », section « Trigonométrie ». Il couvre :

- cercle trigonométrique, longueur d'arc, radian ;
- enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique, image d'un nombre réel ;
- cosinus et sinus d'un nombre réel ; lien avec le triangle rectangle ; valeurs remarquables ;
- placer un point sur le cercle ; par lecture du cercle, cosinus et sinus d'angles associés à une valeur remarquable ;
- **démonstration** au programme : calcul de $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$;
- **algorithme** : approximation de π par la méthode d'Archimède.

Les fonctions cosinus et sinus (courbes, périodicité) et les formules d'addition sont étudiées en terminale.

Objectif : placer l'image d'un réel sur le cercle trigonométrique, définir et calculer le cosinus et le sinus d'un réel, et utiliser les symétries du cercle pour les angles associés.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Le cercle trigonométrique et le radian 3

2 Enroulement de la droite et image d'un réel 4

3 Cosinus et sinus d'un réel 4

4 Valeurs remarquables 5

5 Angles associés 5

6 Algorithme : la méthode d'Archimède 6

7 Erreurs classiques 6

8 Fiche de synthèse 7

9 Exercices d'application 7

10 Corrigés des exercices 7

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Le cercle trigonométrique et le radian

Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Radian

Un angle au centre mesure 1 **radian** lorsqu'il intercepte sur un cercle de rayon r un arc de longueur r. Sur un cercle de rayon r, un angle de θ radians intercepte un arc de longueur

$$\boxed{L = r\,\theta}$$

Le tour complet mesure 2π radians ; donc π rad $= 180°$.

Conversions

Une mesure d en degrés et une mesure θ en radians sont proportionnelles : $\theta = \dfrac{\pi}{180}\,d$.

Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Longueur d'un arc

Sur un cercle de rayon 5 cm, un angle de $\frac{2\pi}{5}$ rad intercepte un arc de longueur $5\times\frac{2\pi}{5} = 2\pi \approx 6{,}28$ cm. Un angle de $72°$ vaut $\frac{\pi}{180}\times 72 = \frac{2\pi}{5}$ rad.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

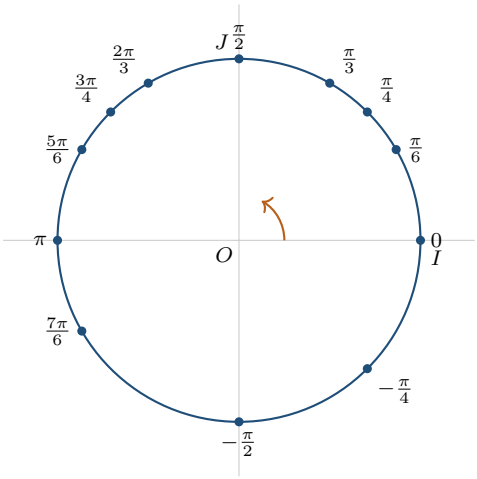
2. Enroulement de la droite et image d'un réel

Image d'un réel

On « enroule » la droite des réels sur le cercle trigonométrique, en partant de I : les réels positifs dans le sens direct, les réels négatifs dans le sens indirect. À chaque réel x correspond un unique point M du cercle, l'**image** de x : l'arc $\overset{\frown}{IM}$ parcouru a pour longueur $|x|$.

Un point, une infinité de réels

Les réels x et $x + 2k\pi$ (k entier relatif) ont la même image, car 2π est la longueur d'un tour complet.



Images de réels remarquables sur le cercle trigonométrique (sens direct en orange).

Placer des points

- $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$: même image que $\frac{\pi}{2}$, le point J.
- $-\frac{3\pi}{4}$: on tourne de $\frac{3\pi}{4}$ dans le sens indirect, et l'on obtient le même point que $\frac{5\pi}{4}$, car $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$.
- $\frac{17\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$: même image que $\frac{5\pi}{6}$.

3. Cosinus et sinus d'un réel

Cosinus et sinus

Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique. Le **cosinus** de x est l'abscisse de M, le **sinus** de x son ordonnée :

$$\boxed{M(\cos x\,;\sin x)}$$

Propriétés immédiates

Pour tout réel x et tout entier k :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (car $OM = 1$, théorème de Pythagore) ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$.

Lien avec le triangle rectangle

Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$, le point M et son projeté H sur l'axe des abscisses forment le triangle OHM rectangle en H, d'hypoténuse $OM=1$. Le cosinus et le sinus du réel x sont ceux de l'angle $\widehat{HOM}$ (de mesure x radians) au sens du collège : $\cos x=\frac{OH}{OM}=OH$ et $\sin x=\frac{HM}{OM}=HM$.

Utiliser la relation fondamentale

On sait que $\sin x=\frac{3}{5}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. Alors $\cos^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$; comme M est dans le quart de cercle de gauche, $\cos x<0$, donc $\cos x=-\frac{4}{5}$.

4. Valeurs remarquables

Tableau à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Valeurs en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$. En $\frac{\pi}{4}$. Le triangle OHM est rectangle en H avec un angle de 45° : il est isocèle, donc $OH=HM$, c'est-à-dire $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=c$ avec $c>0$. La relation $\cos^2+\sin^2=1$ donne $2c^2=1$, d'où $c=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
En $\frac{\pi}{3}$. Le triangle OIM a deux côtés de longueur 1 ($OI=OM$) et un angle de 60° entre eux : il est équilatéral. Le projeté H de M sur (OI) est le milieu de $[OI]$ (une hauteur d'un triangle équilatéral est aussi une médiane), donc $\cos\frac{\pi}{3}=OH=\frac{1}{2}$. Puis $\sin^2\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{3}>0$, d'où $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Angles associés

Symétries du cercle

Pour tout réel x, les images de x et de ses angles associés sont symétriques par rapport à un axe ou au centre :

Réel	cosinus	sinus	Symétrie de l'image de x
$-x$	$\cos x$	$-\sin x$	par rapport à l'axe des abscisses
$\pi-x$	$-\cos x$	$\sin x$	par rapport à l'axe des ordonnées
$\pi+x$	$-\cos x$	$-\sin x$	par rapport à l'origine O
$\frac{\pi}{2}-x$	$\sin x$	$\cos x$	par rapport à la droite $y=x$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Calculer le cosinus et le sinus d'un angle associé

1. Placer le point sur le cercle et repérer la valeur remarquable associée ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{3}$) ;
2. lire les signes du cosinus (gauche ou droite) et du sinus (haut ou bas) ;
3. reporter les valeurs absolues du tableau.

— $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
— $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$: $\cos\frac{5\pi}{4} = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
— $-\frac{\pi}{6}$: $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
— $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$: $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Lecture inverse

Sur $]-\pi\,;\pi]$, les réels dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ ont pour images les deux points du cercle d'abscisse $\frac{1}{2}$: ce sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

6. Algorithme : la méthode d'Archimède

Approcher π

Le demi-périmètre d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 approche π par défaut. En partant de l'hexagone (côté $c_6 = 1$) et en doublant le nombre de côtés, le théorème de Pythagore donne $c_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$.

```
from math import sqrt

def archimede(etapes):
    n = 6
    c = 1
    for k in range(etapes):
        c = sqrt(2 - sqrt(4 - c**2))
        n = 2 * n
    return n * c / 2
```

Demi-périmètres obtenus : 3 ($n = 6$) ; 3,105 8 (12) ; 3,132 6 (24) ; 3,139 4 (48) ; 3,141 0 (96), le calcul d'Archimède.

7. Erreurs classiques

À éviter

— Confondre degrés et radians (calculatrice mal réglée).
— Inverser cosinus (abscisse) et sinus (ordonnée).
— Oublier le signe : dans le quart de cercle « en bas à gauche », cosinus et sinus sont négatifs.
— Croire que $\cos(\pi - x) = \cos x$: la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées change le signe du cosinus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Fiche de synthèse

Radian	π rad $= 180°$; arc $L = r\theta$
Image d'un réel	enroulement depuis I ; x et $x + 2k\pi$ ont la même image
Définition	$M(\cos x\,;\sin x)$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Valeurs	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (sinus dans l'ordre inverse)
Angles associés	$-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$: symétries du cercle

9. Exercices d'application

Exercice 1 – Radians

Convertir en radians $150°$ et $225°$, puis en degrés $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{5}$. Calculer la longueur d'un arc de $\frac{\pi}{3}$ rad sur un cercle de rayon 6 cm.

Exercice 2 – Placer des points

Donner un réel de $]-\pi\,;\pi]$ ayant la même image que : a) $\frac{13\pi}{6}$; b) $\frac{7\pi}{4}$; c) $-\frac{5\pi}{3}$.

Exercice 3 – Angles associés

Calculer le cosinus et le sinus de $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

Exercice 4 – Relation fondamentale

On sait que $\cos x = -\frac{5}{13}$ et $-\pi < x < 0$. Calculer $\sin x$.

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $150° = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$; $225° = \frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{6} = 210°$; $\frac{2\pi}{5} = 72°$. Arc : $L = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \approx 6{,}28$ cm.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. a) $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$. b) $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$. c) $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$: cos $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$, sin $= \frac{\sqrt{2}}{2}$. $-\frac{2\pi}{3} = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$: cos $= -\frac{1}{2}$, sin $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, même image que $-\frac{\pi}{6}$: cos $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, sin $= -\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Comme $-\pi < x < 0$, le point est sous l'axe des abscisses : $\sin x < 0$, donc $\sin x = -\frac{12}{13}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).