Plaquette 4 – Déterminer une loi, calculer espérance, variance et écart type

Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Loi d'une variable aléatoire. Le tableau des valeurs x_i et des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, avec

$$\sum_i p_i = 1$$

Espérance — la « moyenne théorique » :

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

Variance — la dispersion autour de l'espérance :

$$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

La seconde forme est celle de **König-Huygens** : plus rapide, elle évite de soustraire l'espérance dans chaque terme.

Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ — il s'exprime dans la **même unité** que X.

Transformation affine. Pour $Y = aX + b$:

$$E(Y) = aE(X) + b \qquad V(Y) = a^2 V(X) \qquad \sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$$

Interprétation de l'espérance. Sur un grand nombre de répétitions, la **moyenne observée** se rapproche de $E(X)$ — c'est la loi des grands nombres.

Jeu équitable : le gain algébrique G vérifie $E(G) = 0$.

Méthode de calcul recommandée. On ajoute deux lignes au tableau de la loi :

ligne	contenu
$x_i p_i$	somme $= E(X)$
$x_i^2 p_i$	somme $= E\left(X^2\right)$, puis $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$

Correction de l'exercice 1 – Loi d'une variable simple

— **Effectif total** : $3 + 2 + 1 = 6$ boules.

— **Loi** :

! x_i	1	5	10
p_i	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

— **Contrôle** : $\frac{3+2+1}{6} = 1$ ✓

— **Espérance** :

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{6} + 5 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{3+10+10}{6} = \frac{23}{6} \approx 3{,}8333$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle de cohérence** : $E(X)$ est comprise entre 1 et 10, plus proche des petites valeurs puisque la moitié des boules porte 1 ✓

— **Variance** : $E\left(X^2\right) = \dfrac{3\times 1 + 2\times 25 + 1\times 100}{6} = \dfrac{3+50+100}{6} = \dfrac{153}{6} = 25{,}5$.

— $V(X) = 25{,}5 - \left(\dfrac{23}{6}\right)^2 = 25{,}5 - 14{,}6944 \approx 10{,}806$ et $\sigma(X) \approx 3{,}287$.

— **Lecture** : l'écart type est du même ordre que l'espérance — la variable est très dispersée.

Réponse. $P(X=1) = \dfrac{1}{2}$, $P(X=5) = \dfrac{1}{3}$, $P(X=10) = \dfrac{1}{6}$; $E(X) = \dfrac{23}{6} \approx 3{,}83$.

Correction de l'exercice 2 – Espérance et variance

— **Contrôle** : $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$ ✓

— **Espérance** :

$$E(X) = -1\times 0{,}5 + 2\times 0{,}3 + 4\times 0{,}2 = -0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}8 = 0{,}9$$

— **Moment d'ordre 2** :

$$E\left(X^2\right) = 1\times 0{,}5 + 4\times 0{,}3 + 16\times 0{,}2 = 0{,}5 + 1{,}2 + 3{,}2 = 4{,}9$$

— **Variance** :

$$V(X) = 4{,}9 - 0{,}81 = 4{,}09$$

— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{4{,}09} \approx 2{,}0224$.

— **Contrôle par la définition** : $(-1{,}9)^2\times 0{,}5 + (1{,}1)^2\times 0{,}3 + (3{,}1)^2\times 0{,}2$

— $= 3{,}61\times 0{,}5 + 1{,}21\times 0{,}3 + 9{,}61\times 0{,}2 = 1{,}805 + 0{,}363 + 1{,}922 = 4{,}09$ ✓

— **Lecture** : $E(X) = 0{,}9$ est proche de 0 alors que $\sigma \approx 2$ — les valeurs se répartissent largement de part et d'autre.

Réponse. $E(X) = 0{,}9$, $V(X) = 4{,}09$, $\sigma(X) \approx 2{,}02$.

Correction de l'exercice 3 – Paramètre manquant

— **Somme** : $0{,}1 + a + 0{,}3 + 2a = 1$, donc $3a = 0{,}6$ et

$$a = 0{,}2$$

— **Loi complète** : 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4.

— **Contrôle** : $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1$ ✓

— **Espérance** :

$$E(X) = 0\times 0{,}1 + 1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}3 + 3\times 0{,}4 = 0 + 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 = 2$$

— **Cohérence** : les probabilités **croissent** avec les valeurs, donc l'espérance doit être au-dessus du milieu 1,5 — on trouve 2 ✓

— **Variance** : $E\left(X^2\right) = 0 + 0{,}2 + 1{,}2 + 3{,}6 = 5$, donc $V(X) = 5 - 4 = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

— **Remarque élégante** : la loi est exactement $P(X=k) = \dfrac{k+1}{10}$, et la variance vaut 1 pile.

Réponse. $a = 0{,}2$ et $E(X) = 2$.

Correction de l'exercice 4 – Somme de deux dés

— **Somme égale à** 5 : les couples $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$, soit 4 cas sur 36.

$$P(S=5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Somme au plus** 4 : $S = 2$ (un cas), $S = 3$ (deux), $S = 4$ (trois).

$$P(S \leq 4) = \frac{1+2+3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$$

— **Espérance** : avec les effectifs $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ des sommes 2 à 12 (contrôle ci-dessous),

$$E(S) = \frac{2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12\times1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

— **Contrôle par symétrie** : la loi de S est symétrique autour de 7, qui est donc à la fois l'espérance, la médiane et le mode ✓

— **Contrôle de la loi complète** : les effectifs sont $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ pour S de 2 à 12, de somme 36 ✓

— **Variance** : $E\left(S^2\right) = \frac{1974}{36}$, donc $V(S) = \frac{1974}{36} - 49 = \frac{35}{6} \approx 5{,}8333$ et $\sigma(S) \approx 2{,}4152$.

— **Piège** : les 11 valeurs de S ne sont **pas** équiprobables — écrire $P(S = 5) = \frac{1}{11}$ est une erreur classique.

Réponse. $P(S = 5) = \frac{1}{9}$, $P(S \leq 4) = \frac{1}{6}$, $E(S) = 7$.

Correction de l'exercice 5 – Gain d'un jeu

— **Probabilités** : 4 as sur 32, soit $\frac{1}{8}$; 12 figures sur 32, soit $\frac{3}{8}$; rien pour les 16 autres, soit $\frac{1}{2}$.

— **Contrôle** : $\frac{4+12+16}{32} = 1$ ✓

— **Gain algébrique** : $G = 7$ avec $\frac{1}{8}$; $G = 2$ avec $\frac{3}{8}$; $G = -3$ avec $\frac{1}{2}$.

— **Espérance** :

$$E(G) = 7\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{3}{8} - 3\times\frac{1}{2} = \frac{7}{8} + \frac{6}{8} - \frac{12}{8} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

— **Conclusion** : $E(G) = 0{,}125 > 0$ — le jeu est **favorable au joueur** de 12,5 centimes par partie.

— **Contrôle par le gain brut** : $10\times\frac{1}{8} + 5\times\frac{3}{8} = \frac{10}{8} + \frac{15}{8} = \frac{25}{8} = 3{,}125$ € pour une mise de 3 € ✓

— **Mise d'équité** : 3,125 €.

— **Variance** : $E\left(G^2\right) = 49\times\frac{1}{8} + 4\times\frac{3}{8} + 9\times\frac{1}{2} = \frac{49}{8} + \frac{12}{8} + \frac{36}{8} = \frac{97}{8} = 12{,}125$, donc $V(G) = 12{,}125 - 0{,}015625 \approx 12{,}109$ et $\sigma(G) \approx 3{,}48$ € — la fluctuation écrase l'espérance, il faut beaucoup de parties pour que l'avantage se matérialise.

Réponse. Non : $E(G) = 0{,}125$ € > 0, le jeu est favorable au joueur.

Correction de l'exercice 6 – Transformation affine

— **Variance de** X : $V(X) = 3^2 = 9$.

— **Espérance de** Y :

$$E(Y) = -2\times12 + 5 = -19$$

— **Variance de** Y :

$$V(Y) = (-2)^2\times9 = 36$$

— **Écart type** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sigma(Y) = \sqrt{36} = 6$$

— **Contrôle** : $\sigma(Y) = |a|\sigma(X) = 2 \times 3 = 6$ ✓

— **Pièges évités** : le $+5$ **décale** l'espérance mais ne change pas la dispersion ; le coefficient -2 est **élevé au carré** dans la variance, donc le signe disparaît.

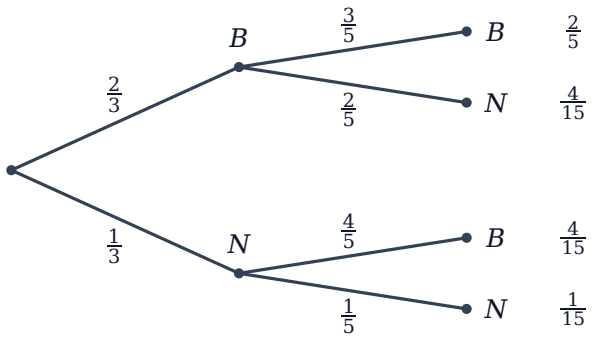
— **Erreur classique** : écrire $V(Y) = -2 \times 9 = -18$ — une variance est **toujours positive** ✓

— **Vérification sur un exemple concret** : si X prend les valeurs 9 et 15 avec probabilité $\frac{1}{2}$, alors $E(X) = 12$ et $V(X) = 9$ ✓ ; Y prend -13 et -25, d'espérance -19 ✓ et de variance 36 ✓

Réponse. $E(Y) = -19$, $V(Y) = 36$, $\sigma(Y) = 6$.

Correction de l'exercice 7 – Loi à partir d'une expérience

On tire les deux boules l'une après l'autre, sans remise : la composition de l'urne change au second tirage.



B : blanche, N : noire — tirages sans remise

— $X = 2$: chemin BB, $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

— $X = 1$: chemins BN et NB, $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30} + \frac{8}{30} = \frac{8}{15}$.

— $X = 0$: chemin NN, $\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

Contrôle. $\frac{1+8+6}{15} = 1$.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{6}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$$

Lecture. Les blanches représentent $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de l'urne, et l'on tire 2 boules : on retrouve $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ blanche en moyenne.

Variance. $E\left(X^2\right) = \frac{8+24}{15} = \frac{32}{15}$, donc $V(X) = \frac{32}{15} - \frac{16}{9} = \frac{16}{45} \approx 0{,}3556$.

Réponse. $\frac{1}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{6}{15}$; $E(X) = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$.

Correction de l'exercice 8 – Comparaison de deux jeux

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Jeu A.

$$E(G_A) = 2 \times 0{,}5 - 1 \times 0{,}5 = 0{,}5 \text{ €}$$

— $E\left(G_A^2\right) = 4 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 2{,}5$, donc $V(G_A) = 2{,}5 - 0{,}25 = 2{,}25$ et $\sigma(G_A) = 1{,}5$ €.

Jeu B.

$$E(G_B) = 10 \times 0{,}1 - 1 \times 0{,}9 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 \text{ €}$$

— $E\left(G_B^2\right) = 100 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}9 = 10{,}9$, donc $V(G_B) = 10{,}9 - 0{,}01 = 10{,}89$ et $\sigma(G_B) = 3{,}3$ €.

Comparaison.

— **Espérance** : A rapporte **cinq fois** plus en moyenne (0,50 € contre 0,10 €).
— **Risque** : B est **plus de deux fois** plus dispersé (3,30 € contre 1,50 €).
— **Conclusion** : le jeu A est meilleur sur les deux plans — plus rentable **et** moins risqué.
— **Rapport rendement/risque** : $\frac{0{,}5}{1{,}5} \approx 0{,}333$ pour A contre $\frac{0{,}1}{3{,}3} \approx 0{,}030$ pour B, un facteur 11 ✓
— **Sur** 100 **parties** : A rapporte 50 € ±15 € ; B rapporte 10 € ±33 € — avec B, une perte reste très possible.

Réponse. A : $E = 0{,}5$ €, $\sigma = 1{,}5$ € · B : $E = 0{,}1$ €, $\sigma = 3{,}3$ € — A est meilleur.

Correction de l’exercice 9 – Loi uniforme

— **Espérance** :

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

— **Moment d’ordre 2** :

$$E\left(X^2\right) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15{,}1667$$

— **Variance** :

$$V(X) = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 \approx 15{,}1667 - 12{,}25 = 2{,}9167 \approx \frac{35}{12}$$

— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}7078$.
— **Formules générales** pour la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$:

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

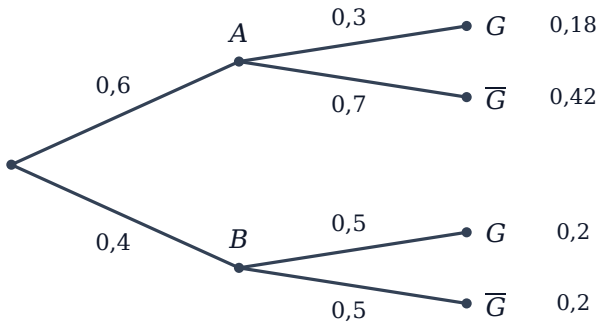
— **Contrôle** : $\frac{7}{2} = 3{,}5$ ✓ et $\frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}$ ✓
— **Application à un dé à** 20 **faces** : $E = 10{,}5$ et $V = \frac{399}{12} = 33{,}25$, donc $\sigma \approx 5{,}766$.
— **Lecture** : $\sigma \approx 1{,}71$ pour un dé à six faces — l’écart typique au 3,5 moyen est donc de l’ordre de 1,7 point.

Réponse. $E(X) = 3{,}5$, $V(X) = \frac{35}{12} \approx 2{,}92$, $\sigma(X) \approx 1{,}71$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Une dépense lue sur un arbre

a) Les probabilités du second niveau sont des probabilités **conditionnelles** : $P_A(G) = 0{,}3$ et $P_B(G) = 0{,}5$.



A, B : modèle choisi ; G : garantie prise

On lit la dépense au bout de chaque chemin :

x_i **(€)**	120	150	200	230
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,42	0,18

b) Espérance :

$$E(X) = 120 \times 0{,}2 + 150 \times 0{,}2 + 200 \times 0{,}42 + 230 \times 0{,}18 = 24 + 30 + 84 + 41{,}4 = 179{,}4$$

$E\left(X^2\right) = 14\,400 \times 0{,}2 + 22\,500 \times 0{,}2 + 40\,000 \times 0{,}42 + 52\,900 \times 0{,}18 = 33\,702$, d'où

$$V(X) = 33\,702 - 179{,}4^2 = 1517{,}64 \qquad \sigma(X) \approx 38{,}96 \text{ €}$$

c) Formule des probabilités totales :

$$P(G) = 0{,}6 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}18 + 0{,}2 = 0{,}38$$

Réponse. a) 120 : 0,2 ; 150 : 0,2 ; 200 : 0,42 ; 230 : 0,18 — b) $E(X) = 179{,}4$ €, $V(X) = 1517{,}64$, $\sigma \approx 38{,}96$ € — c) 0,38.

Correction de l'exercice 11 – Espérance d'un maximum

— **Méthode** : $P(M \leq k) = \dfrac{k^2}{36}$ (les deux dés doivent être $\leq k$).

— **Loi** : $P(M = k) = \dfrac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \dfrac{2k-1}{36}$.

— **Valeur en** 6 :

$$P(M = 6) = \frac{11}{36} \approx 0{,}3056$$

— **Contrôle direct** : les couples contenant au moins un 6 sont au nombre de $36 - 25 = 11$ ✓

— **Espérance** :

$$E(M) = \frac{1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4{,}4722$$

— **Contrôle des probabilités** : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$ ✓

— **Cohérence** : $E(M) \approx 4{,}47 > 3{,}5$ — le maximum tire naturellement vers le haut ✓

— **Minimum** : par symétrie $k \mapsto 7 - k$, $E(m) = 7 - E(M) = \dfrac{91}{36} \approx 2{,}5278$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : $E(M) + E(m) = 7 = E(\text{somme des deux dés})$ ✓ — car $M + m$ est exactement la somme.

Réponse. $P(M = 6) = \dfrac{11}{36}$ et $E(M) = \dfrac{161}{36} \approx 4{,}47$.

Correction de l'exercice 12 – Prime d'assurance

— **Coût moyen du risque** : $0{,}04 \times 2000 = 80$ €.

— **Prime nécessaire** :

$$80 + 30 = 110 \text{ €}$$

— **Vérification** : avec une prime de 110 €, le gain de l'assureur vaut 110 € (probabilité 0,96) ou $110 - 2000 = -1890$ € (probabilité 0,04).

— $E(G) = 110 \times 0{,}96 - 1890 \times 0{,}04 = 105{,}6 - 75{,}6 = 30$ € ✓

— **Variance** : $E\left(G^2\right) = 12\,100 \times 0{,}96 + 3\,572\,100 \times 0{,}04 = 11\,616 + 142\,884 = 154\,500$.

— $V(G) = 154\,500 - 900 = 153\,600$, donc $\sigma(G) \approx 391{,}92$ € — **treize fois** l'espérance.

— **Mutualisation** : sur 10 000 contrats, le bénéfice espéré est de 300 000 € avec un écart type de $100 \times 391{,}92 \approx 39\,192$ €.

— **Risque relatif** : $\dfrac{39\,192}{300\,000} \approx 13{,}1\,\%$ contre 1306 % pour un seul contrat ✓

— **Conclusion** : c'est le grand nombre de contrats, non la prime, qui rend l'assurance viable.

Réponse. Prime de 110 € (80 € de risque + 30 € de marge).

Correction de l'exercice 13 – Variable indicatrice

— **Espérance** :

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

— **Moment d'ordre 2** : $E\left(X^2\right) = 1^2 \times p = p$ (car $X^2 = X$ pour une indicatrice).

— **Variance** :

$$V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

— **Maximisation** : $p(1 - p) = \dfrac{1}{4} - \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2$, maximale pour

$$p = \frac{1}{2} \qquad \text{avec} \qquad V(X) = \frac{1}{4}$$

— **Contrôles** : $p = 0{,}5$ donne $V = 0{,}25$ ✓ ; $p = 0{,}1$ donne $V = 0{,}09$; $p = 0{,}9$ donne aussi 0,09 ✓ — la variance est **symétrique** autour de $\dfrac{1}{2}$.

— **Cas extrêmes** : $p = 0$ ou $p = 1$ donnent $V = 0$ — la variable est **certaine**, donc sans dispersion ✓

— **Interprétation** : l'incertitude est **maximale** quand les deux issues sont équiprobables, ce qui est intuitif.

— **Usage** : cette majoration $p(1 - p) \leq \dfrac{1}{4}$ sert à dimensionner les sondages sans connaître p.

Réponse. $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$, maximale ($\frac{1}{4}$) pour $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Loi et médiane

— **Contrôle** : $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Espérance** :

$$E(X) = 0{,}1 + 0{,}4 + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}5 = 3$$

— **Mode** : la valeur la plus probable, soit 3 (probabilité 0,4).

— **Médiane** : les probabilités cumulées sont 0,1 ; 0,3 ; 0,7 ; 0,9 ; 1 — le seuil 0,5 est franchi en $x = 3$, donc la **médiane vaut** 3.

— **Coïncidence** : espérance, mode et médiane valent tous 3 — signe d'une loi **symétrique** ✓

— **Contrôle de la symétrie** : $P(X = 1) = P(X = 5)$ et $P(X = 2) = P(X = 4)$ ✓

— **Variance** : $E\left(X^2\right) = 0{,}1 + 0{,}8 + 3{,}6 + 3{,}2 + 2{,}5 = 10{,}2$, donc $V(X) = 10{,}2 - 9 = 1{,}2$ et $\sigma(X) \approx 1{,}0954$.

— **Remarque** : pour une loi **asymétrique**, ces trois indicateurs diffèrent — c'est justement ce qui permet de détecter une asymétrie.

Réponse. $E(X) = 3$, mode 3, médiane 3 (loi symétrique).

Correction de l'exercice 15 – Espérance conditionnelle simple

— **Gain par pièce** : $G = 10$ avec 0,95 ; $G = -2$ avec 0,05.

— **Espérance** :

$$E(G) = 10 \times 0{,}95 - 2 \times 0{,}05 = 9{,}5 - 0{,}1 = 9{,}4 \text{ €}$$

— **Sur** 1000 **pièces** : 9400 € espérés.

— **Variance** : $E\left(G^2\right) = 100 \times 0{,}95 + 4 \times 0{,}05 = 95 + 0{,}2 = 95{,}2$.

— $V(G) = 95{,}2 - 88{,}36 = 6{,}84$, donc $\sigma(G) \approx 2{,}6153$ €.

— **Effet d'une dégradation** : si le taux de rebut passait à 10 %, le gain tomberait à $10 \times 0{,}9 - 2 \times 0{,}1 = 8{,}8$ € par pièce, soit 600 € de moins sur 1000 pièces.

— **Lecture** : chaque point de taux de rebut coûte 12 centimes par pièce ✓

Réponse. $E(G) = 9{,}40$ € par pièce, soit 9400 € pour 1000 pièces.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : loterie

a) **Loi du gain** (gain brut moins la mise de 4 €) :

! g_i	496	46	6	−4
p_i	$\frac{1}{500}$	$\frac{5}{500}$	$\frac{20}{500}$	$\frac{474}{500}$

— **Contrôle** : $1 + 5 + 20 + 474 = 500$ ✓

b) **Espérance** :

$$E(G) = \frac{496 \times 1 + 46 \times 5 + 6 \times 20 - 4 \times 474}{500} = \frac{496 + 230 + 120 - 1896}{500} = \frac{-1050}{500} = -2{,}10$$

— **Interprétation** : chaque joueur perd en moyenne 2,10 € par billet — la loterie est très **défavorable**.

— **Contrôle par les lots** : total distribué = 500 + 250 + 200 = 950 € pour 2000 € de recettes, soit $\frac{950}{500} = 1{,}90$ € rendu par billet et $4 - 1{,}90 = 2{,}10$ € de perte ✓

— **Taux de redistribution** : $\frac{950}{2000} = 47{,}5\,\%$.

c) **Écart type** :

$$E\left(G^2\right) = \frac{496^2 + 5 \times 46^2 + 20 \times 6^2 + 474 \times 16}{500} = \frac{246\,016 + 10\,580 + 720 + 7584}{500} = \frac{264\,900}{500} = 529{,}8$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$V(G) = 529{,}8 - 4{,}41 = 525{,}39 \qquad \sigma(G) \approx 22{,}92\ €$$

— **Lecture** : l'écart type (22,92 €) écrase l'espérance (−2,10 €) — c'est ce gros lot improbable qui entretient l'espoir des joueurs.

— **Bénéfice de l'organisateur** : $2000 - 950 = 1050$ €.

— **Contrôle** : $500 \times 2{,}10 = 1050$ € ✓ — ce que perdent les joueurs est exactement ce que gagne l'organisateur, comme dans tout jeu à somme nulle.

— **Probabilité de gagner quelque chose** : $\dfrac{26}{500} = 5{,}2\,\%$ — un joueur sur vingt.

Réponse. b) $E(G) = -2{,}10$ € · c) $\sigma(G) \approx 22{,}92$ € et bénéfice de 1050 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).