

Plaquette 4 – Déterminer une loi, calculer espérance, variance et écart type

Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Loi d'une variable aléatoire. Le tableau des valeurs x_i et des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, avec

$$\sum_i p_i = 1$$

Espérance — la « moyenne théorique » :

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

Variance — la dispersion autour de l'espérance :

$$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

La seconde forme est celle de **König-Huygens** : plus rapide, elle évite de soustraire l'espérance dans chaque terme.

Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ — il s'exprime dans la **même unité** que X .

Transformation affine. Pour $Y = aX + b$:

$$E(Y) = aE(X) + b \quad V(Y) = a^2 V(X) \quad \sigma(Y) = |a| \sigma(X)$$

Linéarité de l'espérance. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, toujours.

Interprétation de l'espérance. Sur un grand nombre de répétitions, la **moyenne observée** se rapproche de $E(X)$ — c'est la loi des grands nombres.

Jeu équitable : le gain algébrique G vérifie $E(G) = 0$.

Méthode de calcul recommandée. On ajoute deux lignes au tableau de la loi :

ligne	contenu
$x_i p_i$	somme = $E(X)$
$x_i^2 p_i$	somme = $E(X^2)$, puis $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Correction de l'exercice 1 – Loi d'une variable simple

— **Effectif total** : $3 + 2 + 1 = 6$ boules.

— **Loi** :

x_i	1	5	10
p_i	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

— **Contrôle** : $\frac{3 + 2 + 1}{6} = 1 \checkmark$

— **Espérance** :

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{6} + 5 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{3 + 10 + 10}{6} = \frac{23}{6} \approx 3,8333$$

- **Contrôle de cohérence** : $E(X)$ est comprise entre 1 et 10, plus proche des petites valeurs puisque la moitié des boules porte 1 ✓
 - **Variance** : $E(X^2) = \frac{3 \times 1 + 2 \times 25 + 1 \times 100}{6} = \frac{3 + 50 + 100}{6} = \frac{153}{6} = 25,5$.
 - $V(X) = 25,5 - \left(\frac{23}{6}\right)^2 = 25,5 - 14,6944 \approx 10,806$ et $\sigma(X) \approx 3,287$.
 - **Lecture** : l'écart type est du même ordre que l'espérance — la variable est très dispersée.
- Réponse.** $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 5) = \frac{1}{3}$, $P(X = 10) = \frac{1}{6}$; $E(X) = \frac{23}{6} \approx 3,83$.

Correction de l'exercice 2 - Espérance et variance

- **Contrôle** : $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$ ✓
 - **Espérance** :

$$E(X) = -1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 + 4 \times 0,2 = -0,5 + 0,6 + 0,8 = 0,9$$
 - **Moment d'ordre 2** :

$$E(X^2) = 1 \times 0,5 + 4 \times 0,3 + 16 \times 0,2 = 0,5 + 1,2 + 3,2 = 4,9$$
 - **Variance** :

$$V(X) = 4,9 - 0,81 = 4,09$$
 - **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{4,09} \approx 2,0224$.
 - **Contrôle par la définition** : $(-1,9)^2 \times 0,5 + (1,1)^2 \times 0,3 + (3,1)^2 \times 0,2$
 $= 3,61 \times 0,5 + 1,21 \times 0,3 + 9,61 \times 0,2 = 1,805 + 0,363 + 1,922 = 4,09$ ✓
 - **Lecture** : $E(X) = 0,9$ est proche de 0 alors que $\sigma \approx 2$ — les valeurs se répartissent largement de part et d'autre.
- Réponse.** $E(X) = 0,9$, $V(X) = 4,09$, $\sigma(X) \approx 2,02$.

Correction de l'exercice 3 - Paramètre manquant

- **Somme** : $0,1 + a + 0,3 + 2a = 1$, donc $3a = 0,6$ et

$$a = 0,2$$
 - **Loi complète** : $0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4$.
 - **Contrôle** : $0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 = 1$ ✓
 - **Espérance** :

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,4 = 0 + 0,2 + 0,6 + 1,2 = 2$$
 - **Cohérence** : les probabilités **croissent** avec les valeurs, donc l'espérance doit être au-dessus du milieu 1,5 — on trouve 2 ✓
 - **Variance** : $E(X^2) = 0 + 0,2 + 1,2 + 3,6 = 5$, donc $V(X) = 5 - 4 = 1$ et $\sigma(X) = 1$.
 - **Remarque élégante** : la loi est exactement $P(X = k) = \frac{k+1}{10}$, et la variance vaut 1 pile.
- Réponse.** $a = 0,2$ et $E(X) = 2$.

Correction de l'exercice 4 - Somme de deux dés

- **Somme égale à 5** : les couples (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), soit 4 cas sur 36.

$$P(S = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0,1111$$

- **Somme au plus 4** : $S = 2$ (un cas), $S = 3$ (deux), $S = 4$ (trois).

$$P(S \leq 4) = \frac{1+2+3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

- **Espérance** : par linéarité, $E(S) = 3,5 + 3,5 = 7$.
- **Contrôle par symétrie** : la loi de S est symétrique autour de 7, qui est donc à la fois l'espérance, la médiane et le mode ✓
- **Contrôle de la loi complète** : les effectifs sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 pour S de 2 à 12, de somme 36 ✓
- **Variance** : $V(S) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5,8333$, donc $\sigma(S) \approx 2,4152$.
- **Piège** : les 11 valeurs de S ne sont **pas** équiprobables — écrire $P(S = 5) = \frac{1}{11}$ est une erreur classique.

Réponse. $P(S = 5) = \frac{1}{9}$, $P(S \leq 4) = \frac{1}{6}$, $E(S) = 7$.

Correction de l'exercice 5 - Gain d'un jeu

- **Probabilités** : 4 as sur 32, soit $\frac{1}{8}$; 12 figures sur 32, soit $\frac{3}{8}$; rien pour les 16 autres, soit $\frac{1}{2}$.
- **Contrôle** : $\frac{4+12+16}{32} = 1$ ✓
- **Gain algébrique** : $G = 7$ avec $\frac{1}{8}$; $G = 2$ avec $\frac{3}{8}$; $G = -3$ avec $\frac{1}{2}$.
- **Espérance** :

$$E(G) = 7 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8} + \frac{6}{8} - \frac{12}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$$
- **Conclusion** : $E(G) = 0,125 > 0$ — le jeu est **favorable au joueur** de 12,5 centimes par partie.
- **Contrôle par le gain brut** : $10 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{3}{8} = \frac{10}{8} + \frac{15}{8} = \frac{25}{8} = 3,125$ € pour une mise de 3 € ✓
- **Mise d'équité** : 3,125 €.
- **Variance** : $E(G^2) = 49 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{2} = \frac{49}{8} + \frac{12}{8} + \frac{36}{8} = \frac{97}{8} = 12,125$, donc
 $V(G) = 12,125 - 0,015625 \approx 12,109$ et $\sigma(G) \approx 3,48$ € — la fluctuation écrase l'espérance, il faut beaucoup de parties pour que l'avantage se matérialise.

Réponse. Non : $E(G) = 0,125$ € > 0 , le jeu est favorable au joueur.

Correction de l'exercice 6 - Transformation affine

- **Variance de X** : $V(X) = 3^2 = 9$.
- **Espérance de Y** :

$$E(Y) = -2 \times 12 + 5 = -19$$

- **Variance de Y** :

$$V(Y) = (-2)^2 \times 9 = 36$$

- **Écart type** :

$$\sigma(Y) = \sqrt{36} = 6$$

- **Contrôle** : $\sigma(Y) = |a|\sigma(X) = 2 \times 3 = 6$ ✓
- **Pièges évités** : le +5 **décale** l'espérance mais ne change pas la dispersion ; le coefficient -2 est **élevé au carré** dans la variance, donc le signe disparaît.
- **Erreur classique** : écrire $V(Y) = -2 \times 9 = -18$ — une variance est **toujours positive** ✓
- **Vérification sur un exemple concret** : si X prend les valeurs 9 et 15 avec probabilité $\frac{1}{2}$, alors $E(X) = 12$ et $V(X) = 9$ ✓ ; Y prend -13 et -25 , d'espérance -19 ✓ et de variance 36 ✓

Réponse. $E(Y) = -19$, $V(Y) = 36$, $\sigma(Y) = 6$.

Correction de l'exercice 7 - Loi à partir d'une expérience

- **Tirages possibles** : $\binom{6}{2} = 15$.
- **Aucune blanche** : $\binom{2}{2} = 1$ cas, donc $P(X = 0) = \frac{1}{15}$.
- **Une blanche** : $\binom{4}{1}\binom{2}{1} = 8$ cas, donc $P(X = 1) = \frac{8}{15}$.
- **Deux blanches** : $\binom{4}{2} = 6$ cas, donc $P(X = 2) = \frac{6}{15}$.
- **Contrôle** : $\frac{1 + 8 + 6}{15} = 1$ ✓
- **Espérance** :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{6}{15} = \frac{8 + 12}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \approx 1,3333$$
- **Contrôle par la proportion** : la proportion de blanches est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, et $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ✓ — l'espérance reste proportionnelle même **sans** remise.
- **Variance** : $E(X^2) = \frac{8 + 24}{15} = \frac{32}{15}$, donc $V(X) = \frac{32}{15} - \frac{16}{9} = \frac{96 - 80}{45} = \frac{16}{45} \approx 0,3556$ et $\sigma(X) \approx 0,5963$.
- **Comparaison avec remise** : on aurait $V = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \approx 0,4444$ — la variance est **plus faible** sans remise ✓

Réponse. $\frac{1}{15}, \frac{8}{15}, \frac{6}{15}$; $E(X) = \frac{4}{3} \approx 1,33$.

Correction de l'exercice 8 - Comparaison de deux jeux

Jeu A.

$$E(G_A) = 2 \times 0,5 - 1 \times 0,5 = 0,5 \text{ €}$$

- $E(G_A^2) = 4 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 2,5$, donc $V(G_A) = 2,5 - 0,25 = 2,25$ et $\sigma(G_A) = 1,5 \text{ €}$.

Jeu B.

$$E(G_B) = 10 \times 0,1 - 1 \times 0,9 = 1 - 0,9 = 0,1 \text{ €}$$

- $E(G_B^2) = 100 \times 0,1 + 1 \times 0,9 = 10,9$, donc $V(G_B) = 10,9 - 0,01 = 10,89$ et $\sigma(G_B) = 3,3 \text{ €}$.

Comparaison.

- **Espérance** : A rapporte **cinq fois** plus en moyenne (0,50 € contre 0,10 €).
- **Risque** : B est **plus de deux fois** plus dispersé (3,30 € contre 1,50 €).

- **Conclusion** : le jeu A est meilleur sur les deux plans — plus rentable **et** moins risqué.
- **Rapport rendement/risque** : $\frac{0,5}{1,5} \approx 0,333$ pour A contre $\frac{0,1}{3,3} \approx 0,030$ pour B, un facteur 11 ✓
- **Sur 100 parties** : A rapporte 50 € ± 15 € ; B rapporte 10 € ± 33 € — avec B, une perte reste très possible.

Réponse. A : $E = 0,5$ €, $\sigma = 1,5$ € · B : $E = 0,1$ €, $\sigma = 3,3$ € — A est meilleur.

Correction de l'exercice 9 - Loi uniforme

- **Espérance** :

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

- **Moment d'ordre 2** :

$$E(X^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15,1667$$

- **Variance** :

$$V(X) = \frac{91}{6} - 3,5^2 = 15,1667 - 12,25 = 2,9167 = \frac{35}{12}$$

- **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,7078$.

- **Formules générales** pour la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$:

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

- **Contrôle** : $\frac{7}{2} = 3,5$ ✓ et $\frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}$ ✓

- **Application à un dé à 20 faces** : $E = 10,5$ et $V = \frac{399}{12} = 33,25$, donc $\sigma \approx 5,766$.

- **Lecture** : $\sigma \approx 1,71$ pour un dé à six faces — l'écart typique au 3,5 moyen est donc de l'ordre de 1,7 point.

Réponse. $E(X) = 3,5$, $V(X) = \frac{35}{12} \approx 2,92$, $\sigma(X) \approx 1,71$.

Correction de l'exercice 10 - Espérance d'une somme

- **Espérance** (toujours linéaire) :

$$E(X + Y) = 5 + 3 = 8$$

- **Variance** (car **indépendantes**) :

$$V(X + Y) = 4 + 9 = 13$$

- **Écart type** :

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{13} \approx 3,6056$$

- **Point crucial** : les **écarts types ne s'additionnent pas** — ici $2 + 3 = 5 \neq 3,61$ ✓
- **Interprétation** : $\sqrt{13} < 5$, la dispersion de la somme est **inférieure** à la somme des dispersions, car les écarts se compensent partiellement.
- **Contre-exemple de dépendance** : si $Y = X$ (dépendance totale), on aurait $V(2X) = 4V(X) = 16 \neq 13$ — l'additivité des variances **exige** l'indépendance.
- **Différence** : $E(X - Y) = 2$, mais $V(X - Y) = 4 + 9 = 13$ également — la variance de la différence est la **somme** des variances, pas leur différence.
- **Contrôle** : $V(X - Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 13$ ✓

Réponse. $E = 8$, $V = 13$, $\sigma = \sqrt{13} \approx 3,61$.

Correction de l'exercice 11 - Espérance d'un maximum

— **Méthode** : $P(M \leq k) = \frac{k^2}{36}$ (les deux dés doivent être $\leq k$).

— **Loi** : $P(M = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}$.

— **Valeur en 6** :

$$P(M = 6) = \frac{11}{36} \approx 0,3056$$

— **Contrôle direct** : les couples contenant au moins un 6 sont au nombre de $36 - 25 = 11$ ✓

— **Espérance** :

$$E(M) = \frac{1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,4722$$

— **Contrôle des probabilités** : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$ ✓

— **Cohérence** : $E(M) \approx 4,47 > 3,5$ — le maximum tire naturellement vers le haut ✓

— **Minimum** : par symétrie $k \mapsto 7 - k$, $E(m) = 7 - E(M) = \frac{91}{36} \approx 2,5278$.

— **Contrôle** : $E(M) + E(m) = 7 = E(\text{somme des deux dés})$ ✓ — car $M + m$ est exactement la somme.

Réponse. $P(M = 6) = \frac{11}{36}$ et $E(M) = \frac{161}{36} \approx 4,47$.

Correction de l'exercice 12 - Prime d'assurance

— **Coût moyen du risque** : $0,04 \times 2000 = 80$ €.

— **Prime nécessaire** :

$$80 + 30 = 110 \text{ €}$$

— **Vérification** : avec une prime de 110 €, le gain de l'assureur vaut 110 € (probabilité 0,96) ou $110 - 2000 = -1890$ € (probabilité 0,04).

— $E(G) = 110 \times 0,96 - 1890 \times 0,04 = 105,6 - 75,6 = 30$ € ✓

— **Variance** : $E(G^2) = 12\,100 \times 0,96 + 3\,572\,100 \times 0,04 = 11\,616 + 142\,884 = 154\,500$.

— $V(G) = 154\,500 - 900 = 153\,600$, donc $\sigma(G) \approx 391,92$ € — **treize fois** l'espérance.

— **Mutualisation** : sur 10 000 contrats, le bénéfice espéré est de 300 000 € avec un écart type de $100 \times 391,92 \approx 39\,192$ €.

— **Risque relatif** : $\frac{39\,192}{300\,000} \approx 13,1$ % contre 1306 % pour un seul contrat ✓

— **Conclusion** : c'est le grand nombre de contrats, non la prime, qui rend l'assurance viable.

Réponse. Prime de 110 € (80 € de risque + 30 € de marge).

Correction de l'exercice 13 - Variable indicatrice

— **Espérance** :

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

— **Moment d'ordre 2** : $E(X^2) = 1^2 \times p = p$ (car $X^2 = X$ pour une indicatrice).

— **Variance** :

$$V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

- **Maximisation** : $p(1 - p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$, maximale pour

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad V(X) = \frac{1}{4}$$

- **Contrôles** : $p = 0,5$ donne $V = 0,25$ ✓ ; $p = 0,1$ donne $V = 0,09$; $p = 0,9$ donne aussi $0,09$ ✓ — la variance est **symétrique** autour de $\frac{1}{2}$.
- **Cas extrêmes** : $p = 0$ ou $p = 1$ donnent $V = 0$ — la variable est **certaine**, donc sans dispersion ✓
- **Interprétation** : l'incertitude est **maximale** quand les deux issues sont équiprobables, ce qui est intuitif.
- **Usage** : cette majoration $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ sert à dimensionner les sondages sans connaître p .

Réponse. $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$, maximale ($\frac{1}{4}$) pour $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Loi et médiane

- **Contrôle** : $0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,2 + 0,1 = 1$ ✓
- **Espérance** :

$$E(X) = 0,1 + 0,4 + 1,2 + 0,8 + 0,5 = 3$$

- **Mode** : la valeur la plus probable, soit 3 (probabilité 0,4).
- **Médiane** : les probabilités cumulées sont 0,1 ; 0,3 ; 0,7 ; 0,9 ; 1 — le seuil 0,5 est franchi en $x = 3$, donc la **médiane vaut 3**.
- **Coïncidence** : espérance, mode et médiane valent tous 3 — signe d'une loi **symétrique** ✓
- **Contrôle de la symétrie** : $P(X = 1) = P(X = 5)$ et $P(X = 2) = P(X = 4)$ ✓
- **Variance** : $E(X^2) = 0,1 + 0,8 + 3,6 + 3,2 + 2,5 = 10,2$, donc $V(X) = 10,2 - 9 = 1,2$ et $\sigma(X) \approx 1,0954$.
- **Remarque** : pour une loi **asymétrique**, ces trois indicateurs diffèrent — c'est justement ce qui permet de détecter une asymétrie.

Réponse. $E(X) = 3$, mode 3, médiane 3 (loi symétrique).

Correction de l'exercice 15 - Espérance conditionnelle simple

- **Gain par pièce** : $G = 10$ avec 0,95 ; $G = -2$ avec 0,05.
- **Espérance** :

$$E(G) = 10 \times 0,95 - 2 \times 0,05 = 9,5 - 0,1 = 9,4 \text{ €}$$
- **Sur 1000 pièces** : 9400 € espérés.
- **Variance** : $E(G^2) = 100 \times 0,95 + 4 \times 0,05 = 95 + 0,2 = 95,2$.
- $V(G) = 95,2 - 88,36 = 6,84$, donc $\sigma(G) \approx 2,6153$ €.
- **Sur 1000 pièces** : $\sigma = \sqrt{1000} \times 2,6153 \approx 82,70$ €.
- **Intervalle typique** ($\pm 2\sigma$) : environ [9235 ; 9565] € — la production est très prévisible à cette échelle ✓
- **Effet d'une dégradation** : si le taux de rebut passait à 10 %, le gain tomberait à $10 \times 0,9 - 2 \times 0,1 = 8,8$ € par pièce, soit 600 € de moins sur 1000 pièces.
- **Lecture** : chaque point de taux de rebut coûte 12 centimes par pièce ✓

Réponse. $E(G) = 9,40$ € par pièce, soit 9400 € pour 1000 pièces.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : loterie

a) **Loi du gain** (gain brut moins la mise de 4 €) :

$! g_i$	496	46	6	-4
p_i	$\frac{1}{500}$	$\frac{5}{500}$	$\frac{20}{500}$	$\frac{474}{500}$

— **Contrôle** : $1 + 5 + 20 + 474 = 500$ ✓

b) **Espérance** :

$$E(G) = \frac{496 \times 1 + 46 \times 5 + 6 \times 20 - 4 \times 474}{500} = \frac{496 + 230 + 120 - 1896}{500} = \frac{-1050}{500} = -2,10$$

— **Interprétation** : chaque joueur perd en moyenne 2,10 € par billet — la loterie est très défavorable.

— **Contrôle par les lots** : total distribué = $500 + 250 + 200 = 950$ € pour 2000 € de recettes, soit $\frac{950}{2000} = 1,90$ € rendu par billet et $4 - 1,90 = 2,10$ € de perte ✓

— **Taux de redistribution** : $\frac{950}{2000} = 47,5\%$.

c) **Écart type** :

$$E(G^2) = \frac{496^2 + 5 \times 46^2 + 20 \times 6^2 + 474 \times 16}{500} = \frac{246\,016 + 10\,580 + 720 + 7584}{500} = \frac{264\,900}{500} = 529,8$$

$$V(G) = 529,8 - 4,41 = 525,39 \quad \sigma(G) \approx 22,92 \text{ €}$$

— **Lecture** : l'écart type (22,92 €) écrase l'espérance (-2,10 €) — c'est ce gros lot improbable qui entretient l'espoir des joueurs.

— **Bénéfice de l'organisateur** : $2000 - 950 = 1050$ €.

— **Contrôle** : $500 \times 2,10 = 1050$ € ✓ — ce que perdent les joueurs est exactement ce que gagne l'organisateur, comme dans tout jeu à somme nulle.

— **Probabilité de gagner quelque chose** : $\frac{26}{500} = 5,2\%$ — un joueur sur vingt.

Réponse. b) $E(G) = -2,10$ € · c) $\sigma(G) \approx 22,92$ € et bénéfice de 1050 €.