

## Plaquelette 3 - Écart-type

### Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Définition.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \quad \text{avec} \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

**Pourquoi l'écart type plutôt que la variance ?** Si  $X$  est un gain en euros,  $V(X)$  s'exprime en « euros au carré », qui ne veut rien dire ;  $\sigma(X)$  est en **euros** et se compare directement à  $E(X)$ .

**Interprétation.**  $\sigma(X)$  mesure l'écart **typique** entre une réalisation de  $X$  et sa moyenne :

- $\sigma$  petit : les valeurs sont **groupées** autour de  $E(X)$ , le résultat est prévisible ;
- $\sigma$  grand : les valeurs sont **dispersées**, le résultat est risqué.

##### Changement d'unité ou d'échelle.

$$\sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)$$

Une translation ( $+b$ ) ne change rien ; un changement d'unité multiplie l'écart type par le même facteur.

**Coefficient de variation**, pour comparer des grandeurs d'ordres différents :

$$CV = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \quad (\text{avec } E(X) > 0)$$

**Ordres de grandeur utiles.** Pour une variable à deux valeurs  $\{0; M\}$  de probabilité  $p$  :

$$E(X) = Mp \quad \sigma(X) = M\sqrt{p(1-p)}$$

**Contrôle systématique.**  $\sigma(X) \geq 0$ , et  $\sigma(X)$  ne dépasse jamais la **demi-étendue** des valeurs.

#### Correction de l'exercice 1 - Un premier écart type

— **Espérance :**

$$E(X) = 2 \times 0,5 + 4 \times 0,3 + 9 \times 0,2 = 1 + 1,2 + 1,8 = 4$$

— **Espérance des carrés :**

$$E(X^2) = 4 \times 0,5 + 16 \times 0,3 + 81 \times 0,2 = 2 + 4,8 + 16,2 = 23$$

— **Variance :**

$$V(X) = 23 - 4^2 = 23 - 16 = 7$$

— **Écart type :**

$$\sigma(X) = \sqrt{7} \approx 2,65$$

**Interprétation.** Les valeurs de  $X$  s'écartent typiquement de 2,65 autour de la moyenne 4.

**Contrôles.**

- La variance est positive ✓
- L'écart type ne dépasse pas la demi-étendue  $\frac{9-2}{2} = 3,5$  ✓
- $E(X) = 4$  est bien comprise entre 2 et 9 ✓

**Réponse.**  $E(X) = 4$ ,  $V(X) = 7$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{7} \approx 2,65$ .

### Correction de l'exercice 2 - L'unité de l'écart type

- a) La variance est une moyenne de **carrés** d'écarts : son unité est donc l'euro **au carré**, une unité qui n'a aucun sens concret.
- L'écart type, racine carrée de la variance, revient à l'unité de départ : il s'exprime en **euros**.
- b) **Calcul** :

$$\sigma(G) = \sqrt{16} = 4 \text{ €}$$

**Interprétation.** Le joueur gagne en moyenne 3 €, mais avec des écarts typiques de 4 € autour de cette moyenne : le gain réel d'une partie peut être nettement négatif comme nettement positif.

**Le rapport entre les deux** est parlant :  $\frac{\sigma}{E} = \frac{4}{3} > 1$ . La dispersion dépasse la moyenne, ce qui signale un gain **très irrégulier** — typique des jeux à gros lots rares.

**À retenir.** On ne compare jamais une espérance et une variance : seules l'espérance et l'**écart type** partagent la même unité.

**Réponse.** a) euro<sup>2</sup> puis euro — b)  $\sigma(G) = 4$  €, dispersion supérieure à la moyenne.

### Correction de l'exercice 3 - Changer d'unité

On applique les formules de transformation affine.

- a) Avec  $a = 0,001$  et  $b = 0$  :

$$E(Y) = 0,001 \times 250 = 0,25 \text{ kg} \quad \sigma(Y) = 0,001 \times 6 = 0,006 \text{ kg}$$

- C'est cohérent : 0,25 kg et 6 g sont bien les mêmes grandeurs exprimées autrement.
- b) Avec  $a = 1$  et  $b = -250$  :

$$E(Z) = 250 - 250 = 0 \text{ g} \quad \sigma(Z) = 1 \times 6 = 6 \text{ g}$$

**Ce que montre la question b).** Retrancher une constante **recentre** la distribution sur 0 sans modifier sa dispersion : l'écart type est **insensible** aux translations.

**Application industrielle.** Un contrôle qualité travaille justement sur  $Z$ , l'écart à la cible : la moyenne doit être nulle (pas de dérive) et l'écart type le plus petit possible (bonne régularité).

**Réponse.** a) 0,25 kg et 0,006 kg — b) 0 g et 6 g.

### Correction de l'exercice 4 - Comparer deux productions

**Espérance : avantage à A.** La machine A est **centrée** sur la valeur cible ; la machine B verse en moyenne 2 mL de trop, ce qui représente une perte de produit sur de grandes séries.

**Écart type : avantage net à A.**

$$\sigma_A = 4 \text{ mL} \quad \sigma_B = 12 \text{ mL}$$

La machine B est **trois fois plus dispersée** : ses bouteilles s'écartent typiquement de 12 mL de la moyenne, contre 4 mL pour A.

**Conclusion.** La machine A est préférable sur les deux critères : plus juste **et** plus régulière.

**Ce que la dispersion implique concrètement.** Une bouteille de la machine B peut facilement contenir 980 mL, ce qui est en dessous de la contenance annoncée et constitue une non-conformité ; avec la machine A, un tel écart représenterait cinq écarts types — un événement très rare.

**Le critère industriel.** On cherche d'abord un réglage **centré** (espérance égale à la cible), puis on réduit l'écart type : c'est la base du contrôle statistique de production.

**Réponse.** La machine A : elle est centrée sur 1000 mL et trois fois moins dispersée.

### Correction de l'exercice 5 - Écart type d'une variable à deux valeurs

— **Espérance :**

$$E(X) = 0 \times 0,8 + 50 \times 0,2 = 10$$

— **Espérance des carrés :**

$$E(X^2) = 0 + 2500 \times 0,2 = 500$$

— **Variance :**

$$V(X) = 500 - 100 = 400$$

— **Écart type :**  $\sigma(X) = \sqrt{400} = 20$ .

**Contrôle par la formule générale.** Pour une variable valant 0 ou  $M$  avec la probabilité  $p$  :

$$\sigma(X) = M\sqrt{p(1-p)} = 50\sqrt{0,2 \times 0,8} = 50 \times 0,4 = 20$$

Les deux méthodes concordent ✓

**Interprétation.** L'écart type (20) est le **double** de l'espérance (10) : la variable ne prend jamais une valeur proche de sa moyenne, elle vaut 0 ou 50. C'est le signe d'une distribution très **déséquilibrée**, où la moyenne ne résume pas grand-chose.

**Réponse.**  $E(X) = 10$  et  $\sigma(X) = 20$ .

### Correction de l'exercice 6 - Quand la dispersion est maximale

a) **Espérance :**

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

— **Espérance des carrés :** comme  $0^2 = 0$  et  $1^2 = 1$ , on a  $E(X^2) = p$ .

— **Variance :**

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

b)  $V(X) = -p^2 + p$  est un trinôme en  $p$ , de coefficient dominant négatif, de racines 0 et 1. Son maximum est au sommet :

$$p = \frac{0+1}{2} = 0,5$$

— La variance vaut alors 0,25, et l'écart type  $\sigma = 0,5$ .

**Interprétation.** L'incertitude est **maximale** quand les deux issues sont équiprobables — comme une pièce équilibrée. À l'inverse, si  $p = 0,99$ , la variance vaut 0,0099 : le résultat est presque certain, donc peu dispersé.

**Ce modèle a un nom.** Une variable qui vaut 0 ou 1 suit une **loi de Bernoulli** de

paramètre  $p$  : on retrouvera  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$  au chapitre suivant.

**Réponse.** a)  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$  — b) maximal pour  $p = 0,5$ , avec  $\sigma = 0,5$ .

### Correction de l'exercice 7 - Le coefficient de variation

**Comparer les écarts types bruts serait trompeur** :  $300 > 50$ , mais les ordres de grandeur des gains sont différents. On calcule le **coefficient de variation** :

$$CV = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

— **Premier placement** :

$$CV_1 = \frac{50}{200} = 0,25$$

— **Second placement** :

$$CV_2 = \frac{300}{2000} = 0,15$$

**Conclusion.** Le **premier** placement est relativement plus risqué : sa dispersion représente 25 % de son rendement moyen, contre 15 % pour le second.

**L'intérêt du coefficient de variation.** Il est **sans unité**, donc comparable entre grandeurs de natures différentes : on peut ainsi comparer la régularité d'un salaire et celle d'une taille.

**Attention à la limite.** Ce coefficient n'a de sens que si l'espérance est strictement positive : avec un rendement moyen nul ou négatif, il ne veut plus rien dire.

**Réponse.** Le premier :  $CV_1 = 0,25 > CV_2 = 0,15$ .

### Correction de l'exercice 8 - Retrouver une loi

— **Équation sur l'espérance** :

$$E(X) = -2 \times 0,6 + a \times 0,4 = -1,2 + 0,4a$$

— On résout  $-1,2 + 0,4a = 1$  :  $0,4a = 2,2$ , donc

$$a = 5,5$$

— **Espérance des carrés** :

$$E(X^2) = 4 \times 0,6 + 30,25 \times 0,4 = 2,4 + 12,1 = 14,5$$

— **Variance** :  $V(X) = 14,5 - 1^2 = 13,5$ .

— **Écart type** :

$$\sigma(X) = \sqrt{13,5} \approx 3,67$$

— **Contrôle** : la demi-étendue vaut  $\frac{5,5 + 2}{2} = 3,75$ , et  $3,67 \leq 3,75$  ✓

**Remarque.** L'écart type est très proche de sa valeur maximale : c'est normal pour une variable à **deux valeurs seulement**, avec des probabilités presque équilibrées.

**Réponse.**  $a = 5,5$  et  $\sigma(X) = \sqrt{13,5} \approx 3,67$ .

### Correction de l'exercice 9 - Le contrôle des pièces

a) L'intervalle s'écrit  $[20 - 0,1 ; 20 + 0,1]$  : la demi-largeur vaut 0,1 mm.

$$\frac{0,1}{0,05} = 2$$

- L'intervalle de conformité correspond à  $E(D) \pm 2\sigma$  : **deux écarts types** de part et d'autre.
- b) Avec  $\sigma = 0,08$  mm :

$$\frac{0,1}{0,08} = 1,25$$

- Le même intervalle ne représente plus que 1,25 écart type.

**Conséquence industrielle.** La seconde machine produira **beaucoup plus** de pièces non conformes : plus l'écart type augmente, plus la tolérance devient « étroite » relativement à la dispersion réelle.

**Le vocabulaire du contrôle qualité.** Le rapport entre la demi-tolérance et l'écart type s'appelle l'**indice de capacité** : il doit être au moins de 4 dans l'industrie exigeante, soit un écart type d'au plus 0,025 mm ici.

**Réponse.** a)  $2\sigma$  — b)  $1,25\sigma$  seulement : la machine est moins capable.

### Correction de l'exercice 10 - Espérance égale, risques différents

- **Jeu A** :  $E(A) = 0$ , et

$$E(A^2) = 1 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 1 \quad \text{donc} \quad V(A) = 1 - 0 = 1$$

- $\sigma(A) = 1$  €.

- **Jeu B** :  $E(B) = 0$ , et

$$E(B^2) = 10\,000 \times 0,5 + 10\,000 \times 0,5 = 10\,000 \quad \text{donc} \quad V(B) = 10\,000$$

- $\sigma(B) = 100$  €.

**Commentaire.** Les deux jeux sont **équitables** ( $E = 0$ ), mais leurs risques n'ont rien de comparable : le second expose à des variations cent fois plus grandes.

**La leçon essentielle du chapitre.** L'espérance ne dit **rien** sur le risque. Deux situations d'espérance identique peuvent être radicalement différentes : c'est l'écart type qui les distingue, et c'est pour cela qu'on ne le calcule jamais « pour rien ».

- **Contrôle** : dans les deux cas,  $\sigma$  est exactement égal à la demi-étendue, ce qui est le maximum possible pour une variable à deux valeurs équiprobables ✓

**Réponse.**  $\sigma(A) = 1$  € et  $\sigma(B) = 100$  € : même espérance, risques incomparables.

### Correction de l'exercice 11 - Écart type d'un gain de jeu

- **Loi du gain algébrique** :  $G$  vaut 8 € avec  $p = \frac{1}{6}$ , et -2 € avec  $p = \frac{5}{6}$ .

- **Espérance** :

$$E(G) = 8 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{5}{6} = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3} \approx -0,33$$

- **Espérance des carrés** :

$$E(G^2) = 64 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{5}{6} = \frac{64+20}{6} = 14$$

- **Variance** :

$$V(G) = 14 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 14 - \frac{1}{9} = \frac{125}{9} \approx 13,889$$

- **Écart type** :  $\sigma(G) = \sqrt{\frac{125}{9}} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \approx 3,73$  €.

**Lecture.** Le joueur perd en moyenne 0,33 € par partie, mais avec des écarts typiques de 3,73 € : sur quelques parties, le hasard domine complètement la tendance moyenne.

**Ordre de grandeur.** Il faudrait environ 130 parties pour que la perte moyenne cumulée (environ 43 €) dépasse nettement les fluctuations : c'est ainsi que les jeux d'argent deviennent rentables pour l'organisateur.

**Réponse.**  $E(G) = -\frac{1}{3} \approx -0,33$  € et  $\sigma(G) \approx 3,73$  €.

### Correction de l'exercice 12 - Deux transformations successives

On applique les formules, avec  $a = -4$  et  $b = 7$ .

— **Espérance :**

$$E(Y) = -4 \times 10 + 7 = -33$$

— **Écart type :** c'est la **valeur absolue** de  $a$  qui intervient.

$$\sigma(Y) = |-4| \times 2 = 8$$

— **Variance :**  $V(Y) = a^2 V(X) = 16 \times 4 = 64$ , et  $\sqrt{64} = 8$  ✓

**Pourquoi la valeur absolue ?** Un écart type est par définition **positif** : multiplier une variable par  $-4$  retourne la distribution mais ne change pas son étalement. Écrire  $\sigma(Y) = -8$  serait une erreur grossière.

**Ce que la transformation fait.** Elle retourne la distribution autour de l'axe vertical, la recentre en  $-33$  et l'étale d'un facteur 4.

— **Contrôle :** si  $X$  prend la valeur 12 (un écart type au-dessus), alors  $Y$  vaut  $-41$ , soit un écart type **en dessous** de  $-33$  ✓

**Réponse.**  $E(Y) = -33$  et  $\sigma(Y) = 8$ .

### Correction de l'exercice 13 - Le temps de trajet

a) **Espérance :**

$$E(T) = 20 \times 0,3 + 25 \times 0,4 + 30 \times 0,2 + 45 \times 0,1 = 6 + 10 + 6 + 4,5 = 26,5$$

— **Espérance des carrés :**

$$E(T^2) = 400 \times 0,3 + 625 \times 0,4 + 900 \times 0,2 + 2025 \times 0,1$$

— **Calcul :**  $120 + 250 + 180 + 202,5 = 752,5$ .

— **Variance :**  $V(T) = 752,5 - 26,5^2 = 752,5 - 702,25 = 50,25$ .

— **Écart type :**  $\sigma(T) = \sqrt{50,25} \approx 7,1$  min.

— b) Le temps moyen, 26,5 min, laisse une marge confortable. Mais dans 10 % des cas le trajet dure 45 minutes, ce qui ferait arriver l'utilisateur **en retard**.

**Conclusion nuancée.** Le bus convient dans 90 % des cas :

$$P(T \leq 40) = 0,3 + 0,4 + 0,2 = 0,9$$

Pour un rendez-vous important, une marge d'un seul écart type ( $26,5 + 7,1 = 33,6$  min) ne suffit pas : c'est la **queue de distribution** qui décide, pas la moyenne.

**Réponse.** a)  $E(T) = 26,5$  min et  $\sigma(T) \approx 7,1$  min — b) risqué :  $P(T > 40) = 0,1$ .

### Correction de l'exercice 14 - Réduire la dispersion

a) Diviser le capital par deux revient à poser  $R' = 0,5R$  :

$$E(R') = 0,5 \times 60 = 30 \text{ €} \quad \sigma(R') = 0,5 \times 200 = 100 \text{ €}$$

b) **Coefficient de variation** :

$$\frac{\sigma(R)}{E(R)} = \frac{200}{60} \approx 3,33 \quad \frac{\sigma(R')}{E(R')} = \frac{100}{30} \approx 3,33$$

— Le rapport est **inchangé**.

**Ce que cela signifie.** Réduire la mise réduit le gain espéré **et** le risque, exactement dans la même proportion : le profil de risque de l'investissement ne change pas, seule son ampleur diminue.

**Comment réduire vraiment le risque relatif ?** Il faut **diversifier**, c'est-à-dire répartir la somme sur plusieurs actifs indépendants : la moyenne de plusieurs variables indépendantes a un écart type plus faible, relativement à son espérance. C'est le principe mathématique de la diversification.

**Réponse.** a) 30 € et 100 € — b) non, le rapport reste  $\approx 3,33$ .

### Correction de l'exercice 15 – Synthèse : trois jeux au choix

**Jeu A** : gain de 1 € ( $p = 0,8$ ) ou  $-5$  € ( $p = 0,2$ ).

$$E(G_A) = 0,8 - 1 = -0,2 \quad E(G_A^2) = 1 \times 0,8 + 25 \times 0,2 = 5,8$$

—  $V(G_A) = 5,8 - 0,04 = 5,76$ , donc  $\sigma(G_A) = 2,4$  €.

**Jeu B** : gain de 20 € ( $p = 0,2$ ) ou  $-5$  € ( $p = 0,8$ ).

$$E(G_B) = 4 - 4 = 0 \quad E(G_B^2) = 400 \times 0,2 + 25 \times 0,8 = 100$$

—  $V(G_B) = 100 - 0 = 100$ , donc  $\sigma(G_B) = 10$  €.

**Jeu C** : gain toujours nul, donc  $E(G_C) = 0$  et  $\sigma(G_C) = 0$ .

| Jeu | $E(G)$   | $\sigma(G)$ |
|-----|----------|-------------|
| A   | $-0,2$ € | 2,4 €       |
| B   | 0 €      | 10 €        |
| C   | 0 €      | 0 €         |

**Conseil.** Le jeu A est **défavorable** : à écarter. Les jeux B et C sont équitables, mais C ne comporte aucun aléa (on récupère sa mise) tandis que B fait varier le gain de 10 € en moyenne.

Un joueur qui cherche à gagner de l'argent doit choisir B — le seul à offrir une chance de gain —, en sachant qu'il perdra quatre fois sur cinq.

**Réponse.** A :  $-0,2$  € et 2,4 € — B : 0 € et 10 € — C : 0 € et 0 €.