

Plaquette 2 - Espérance et variance

Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espérance de X : la moyenne des valeurs, **pondérée** par leurs probabilités.

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Variance et **écart type** :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Formule de König-Huygens, beaucoup plus rapide à calculer :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2$$

Linéarité. Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(aX + b) = a^2 V(X) \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

Ajouter une constante **décale** la moyenne sans changer la dispersion ; multiplier par a multiplie la dispersion par $|a|$.

Jeu équitable. Un jeu est dit équitable lorsque l'espérance du **gain algébrique** est **nulle** :

$$E(G) = 0$$

Si $E(G) < 0$, le jeu est défavorable au joueur — c'est le cas de tous les jeux d'argent réels.

Interprétation de l'espérance. Elle n'est pas forcément une valeur possible de X : une espérance de 2,5 enfants par famille ne choque personne.

Contrôle systématique. $E(X)$ doit être comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de X ; $V(X)$ doit être **positive**.

Correction de l'exercice 1 - Une première espérance

On applique la définition : chaque valeur est multipliée par sa probabilité, puis on additionne.

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

— **Substitution** :

$$E(X) = 1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 + 5 \times 0,2$$

— **Calcul** : $0,5 + 0,6 + 1 = 2,1$.

$$E(X) = 2,1$$

Interprétation. En répétant l'expérience un grand nombre de fois, la moyenne des résultats s'approche de 2,1.

Contrôle de cohérence. L'espérance doit toujours être comprise entre la plus petite et la plus grande valeur : $1 \leq 2,1 \leq 5$ ✓

Une erreur fréquente. Calculer la moyenne simple $\frac{1+2+5}{3} = 2,67$: cela reviendrait à supposer les trois valeurs équiprobables, ce qui est faux ici.

Réponse. $E(X) = 2,1$.

Correction de l'exercice 2 - Espérance d'un dé

a) Chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$:

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5$$

b) Non : 3,5 **n'est pas** une valeur possible du dé.

Ce que cela signifie. L'espérance est une moyenne **théorique** sur un très grand nombre de lancers, pas un résultat que l'on peut observer. De la même façon, une famille française compte en moyenne 1,8 enfant.

Cas d'une loi uniforme. Quand toutes les valeurs sont équiprobables, l'espérance est la **moyenne arithmétique** des valeurs :

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Contrôle par la symétrie. La loi du dé est symétrique autour de 3,5 : l'espérance devait donc valoir exactement cette valeur ✓

Réponse. a) $E(X) = 3,5$ — b) non, l'espérance n'est pas nécessairement une valeur possible.

Correction de l'exercice 3 - Calculer une variance

On applique la définition, qui mesure l'écart **au carré** à la moyenne :

$$V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$$

— **Écarts à la moyenne** : $1 - 2,1 = -1,1$; $2 - 2,1 = -0,1$; $5 - 2,1 = 2,9$.

— **Carrés** : 1,21 ; 0,01 ; 8,41.

— **Pondération** :

$$V(X) = 0,5 \times 1,21 + 0,3 \times 0,01 + 0,2 \times 8,41$$

— **Calcul** : $0,605 + 0,003 + 1,682 = 2,29$.

$$V(X) = 2,29$$

Pourquoi élever au carré ? Sans le carré, les écarts positifs et négatifs se compenseraient exactement : leur somme pondérée vaut toujours 0. Le carré les rend tous positifs.

Contrôle. Une variance est toujours **positive ou nulle** ✓ Elle est nulle uniquement si X prend une seule valeur.

Réponse. $V(X) = 2,29$.

Correction de l'exercice 4 - La formule rapide

Étape 1 — l'espérance des carrés. On élève chaque valeur au carré, en gardant les mêmes probabilités.

$$E(X^2) = 1^2 \times 0,5 + 2^2 \times 0,3 + 5^2 \times 0,2$$

— **Calcul** : $0,5 + 1,2 + 5 = 6,7$.

Étape 2 — la soustraction.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6,7 - 2,1^2 = 6,7 - 4,41 = 2,29$$

On retrouve exactement la valeur obtenue par la définition ✓

Pourquoi cette formule est préférable. Elle évite de calculer les écarts un par un, et surtout elle ne propage pas les erreurs d'arrondi de $E(X)$ dans chaque terme.

Le piège du carré. $E(X^2)$ et $[E(X)]^2$ sont **différents** : ici 6,7 contre 4,41. Élever au carré puis faire la moyenne n'est pas la même chose que faire la moyenne puis élever au carré — leur écart est justement la variance.

Réponse. $E(X^2) = 6,7$ et $V(X) = 6,7 - 4,41 = 2,29$.

Correction de l'exercice 5 - Le jeu est-il équitable ?

- a) **Gains algébriques** (mise déduite) :
- obtenir 6 : $15 - 3 = 12$ €, avec $P = \frac{1}{6}$;
- obtenir 5 : $6 - 3 = 3$ €, avec $P = \frac{1}{6}$;
- sinon : -3 €, avec $P = \frac{4}{6}$.

g_i	-3	3	12
$P(G = g_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) **Espérance** :

$$E(G) = -3 \times \frac{4}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{6} = \frac{-12 + 3 + 12}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Conclusion. $E(G) = 0,5 > 0$: le jeu est **favorable au joueur**, qui gagne en moyenne 0,50 € par partie. Il n'est donc **pas équitable** — et un organisateur y perdrait de l'argent.

Quelle mise rendrait le jeu équitable ? Le gain brut moyen vaut $\frac{15 + 6}{6} = 3,5$ € : il faudrait fixer la mise à 3,50 € pour que $E(G) = 0$.

- **Contrôle** : avec une mise de 3,5 €, $E(G) = -3,5 \times \frac{4}{6} + 2,5 \times \frac{1}{6} + 11,5 \times \frac{1}{6} = 0$ ✓

Réponse. b) $E(G) = 0,5$ € : jeu favorable au joueur, donc non équitable.

Correction de l'exercice 6 - Fixer une mise

Étape 1 — le gain brut moyen. On note B le gain brut (sans tenir compte du prix du billet).

$$E(B) = 100 \times \frac{1}{50} + 10 \times \frac{5}{50} + 0 \times \frac{44}{50}$$

- **Calcul** : $2 + 1 = 3$ €.

Étape 2 — le prix équitable. Le gain algébrique est $G = B - m$, où m est le prix du billet. Par linéarité de l'espérance :

$$E(G) = E(B) - m = 3 - m$$

- Le jeu est équitable lorsque $E(G) = 0$, donc lorsque

$$m = 3 \text{ €}$$

Interprétation. À 3 € le billet, l'organisateur récolte 150 € pour 50 billets et redistribue

exactement 150 € de lots : il ne gagne ni ne perd rien.

En pratique. Une tombola de kermesse vend ce billet 5 € : l'espérance du joueur vaut alors -2 €, et la différence finance l'association. C'est la marge de l'organisateur.

Réponse. $m = 3$ € (au-delà, le jeu devient défavorable au joueur).

Correction de l'exercice 7 - Espérance d'une transformation

On applique les formules de linéarité, avec $a = 3$ et $b = -5$.

— **Espérance :**

$$E(Y) = aE(X) + b = 3 \times 4 - 5 = 7$$

— **Variance :** la constante b **disparaît**, et le coefficient a est élevé au carré.

$$V(Y) = a^2 V(X) = 9 \times 9 = 81$$

— **Écart type :**

$$\sigma(Y) = |a| \sigma(X) = 3 \times 3 = 9$$

— **Contrôle :** $\sqrt{81} = 9$ ✓

Pourquoi la constante disparaît-elle de la variance ? Ajouter -5 à toutes les valeurs **translate** la distribution sans la resserrer ni l'étaler : la dispersion est inchangée.

Pourquoi le carré sur a ? La variance est une moyenne de **carrés** d'écarts : si tous les écarts sont multipliés par 3, leurs carrés le sont par 9.

Application pratique. Ces formules évitent de recalculer toute la loi de Y : c'est leur principal intérêt.

Réponse. $E(Y) = 7$, $V(Y) = 81$, $\sigma(Y) = 9$.

Correction de l'exercice 8 - Deux placements financiers

a) **Espérances :**

$$E(A) = 100 \times 0,5 = 50 \quad E(B) = 500 \times 0,1 = 50$$

— Les deux placements ont **la même espérance** de gain : 50 €.

— b) **Variances**, par la formule de König-Huygens :

$$V(A) = 100^2 \times 0,5 - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$$

$$V(B) = 500^2 \times 0,1 - 50^2 = 25\,000 - 2500 = 22\,500$$

— **Écarts types :** $\sigma(A) = 50$ € et $\sigma(B) = 150$ € : le placement B est **trois fois plus dispersé**.

Conclusion. À espérance égale, le placement A est **moins risqué**. Un investisseur prudent choisit A ; un joueur qui vise le gros gain choisit B , en acceptant de ne rien obtenir neuf fois sur dix.

Ce que la variance apporte. L'espérance seule ne suffit jamais à comparer deux situations : c'est la dispersion qui mesure le **risque**.

Réponse. a) $E(A) = E(B) = 50$ € — b) $V(A) = 2500 < V(B) = 22\,500$: A est moins risqué.

Correction de l'exercice 9 - Une espérance imposée

On écrit l'espérance en fonction de a :

$$E(X) = 0 \times 0,4 + 2 \times 0,35 + a \times 0,25 = 0,7 + 0,25a$$

— **Équation :** $0,7 + 0,25a = 3$.

— **Résolution** : $0,25a = 2,3$, donc

$$a = \frac{2,3}{0,25} = 9,2$$

— **Vérification** : $0 + 0,7 + 9,2 \times 0,25 = 0,7 + 2,3 = 3 \checkmark$

Contrôle de cohérence. L'espérance doit être comprise entre la plus petite et la plus grande valeur : avec $a = 9,2$, on a bien $0 \leq 3 \leq 9,2 \checkmark$

Ce que l'exercice montre. Une espérance élevée peut venir d'une **valeur rare mais très grande** : ici, une chance sur quatre d'obtenir 9,2 tire la moyenne vers le haut, alors que la valeur la plus probable reste 0.

Réponse. $a = 9,2$.

Correction de l'exercice 10 - Le contrat d'assurance

— a) On note B le bénéfice de l'assureur pour un contrat.

— **Sans sinistre** ($p = 0,98$) : il encaisse 80 €.

— **Avec sinistre** ($p = 0,02$) : il encaisse 80 € mais verse 3000 €, soit $80 - 3000 = -2920$ €.

$$E(B) = 80 \times 0,98 + (-2920) \times 0,02 = 78,4 - 58,4 = 20$$

— L'assureur gagne en moyenne 20 € par contrat.

— b) Par **linéarité**, le bénéfice espéré sur 10 000 contrats vaut :

$$10\,000 \times 20 = 200\,000 \text{ €}$$

Le principe de l'assurance. L'assureur accepte un risque énorme pour chaque client isolé (-2920 € possible) parce que, **sur un grand nombre de contrats**, la moyenne se stabilise autour de 20 € : c'est la loi des grands nombres.

Contrôle par le coût moyen du risque. Le sinistre coûte en moyenne $3000 \times 0,02 = 60$ € par contrat ; la prime de 80 € laisse donc 20 € de marge $\checkmark$

Réponse. a) $E(B) = 20$ € — b) 200 000 € espérés.

Correction de l'exercice 11 - Espérance et variance d'un dé

On utilise la formule de König-Huygens, avec $E(X) = 3,5$.

— **Espérance des carrés** :

$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6} \approx 15,1667$$

— **Variance** :

$$V(X) = \frac{91}{6} - 3,5^2 = \frac{91}{6} - 12,25 \approx 2,9167$$

— **Valeur exacte** : $\frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$.

— **Écart type** :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71$$

Interprétation. Les résultats s'écartent en moyenne d'environ 1,7 de la valeur moyenne 3,5 : c'est cohérent pour des valeurs réparties uniformément de 1 à 6.

Contrôle d'ordre de grandeur. L'écart type ne peut pas dépasser la demi-étendue, ici $\frac{6-1}{2} = 2,5 \checkmark$

Réponse. $V(X) = \frac{35}{12} \approx 2,92$ et $\sigma(X) \approx 1,71$.

Correction de l'exercice 12 - Comparer deux dés

- a) **Dé A** : $E(A) = 3,5$ (calcul classique).
- **Dé B** : $E(B) = \frac{3+3+3+4+4+5}{6} = \frac{22}{6} \approx 3,67$.
- b) **Variance de A** : $\frac{35}{12} \approx 2,92$ (exercice précédent).
- **Variance de B**, par König-Huygens :

$$E(B^2) = \frac{9+9+9+16+16+25}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

$$V(B) = 14 - \left(\frac{22}{6}\right)^2 = 14 - \frac{484}{36} \approx 14 - 13,44 = 0,56$$

- **Écarts types** : $\sigma(A) \approx 1,71$ et $\sigma(B) \approx 0,75$.

Commentaire. Le dé B a une espérance légèrement **supérieure** et une dispersion bien **plus faible** : ses résultats sont concentrés autour de 3 et 4.

Dans un jeu. Si l'on cherche le plus grand résultat possible, A garde un avantage (il peut sortir 6) ; si l'on veut un résultat **régulier**, B est préférable. Espérance et variance disent deux choses différentes.

Réponse. a) 3,5 et $\approx 3,67$ — b) $V(A) \approx 2,92$ contre $V(B) \approx 0,56$.

Correction de l'exercice 13 - Le stand de tir

- a) **Loi du gain** : G vaut $5 - 2 = 3$ € avec $p = 0,3$, et -2 € avec $p = 0,7$.
 $E(G) = 3 \times 0,3 + (-2) \times 0,7 = 0,9 - 1,4 = -0,5$
- Le joueur perd en moyenne 0,50 € par partie : le jeu est **défavorable**.
- b) Par linéarité, sur 50 parties :
 $50 \times (-0,5) = -25$ €
- Il peut prévoir une perte d'environ 25 €.

Attention à l'interprétation. Ce n'est pas une certitude : il **peut** gagner. L'espérance décrit la tendance moyenne, pas le résultat d'une série précise. La variance mesurerait l'ampleur des écarts possibles.

Quelle probabilité rendrait le jeu équitable ? Il faudrait $3p - 2(1 - p) = 0$, soit $5p = 2$ et $p = 0,4$: il faudrait toucher la cible deux fois sur cinq.

Réponse. a) $E(G) = -0,5$ € — b) environ -25 € sur 50 parties.

Correction de l'exercice 14 - Une variance nulle ?

- a) La variance est une somme de termes **positifs ou nuls** :
- $$V(X) = \sum p_i (x_i - E(X))^2$$
- Elle est nulle uniquement si **chaque** terme l'est, donc si toutes les valeurs x_i de probabilité non nulle sont égales à $E(X)$.
 - Autrement dit, X est **constante** : elle prend une seule valeur, et l'expérience n'a plus rien d'aléatoire.
 - b) Avec $P(X = 10) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$:

$$E(X) = 10p \quad E(X^2) = 100p$$

$$V(X) = 100p - 100p^2 = 100p(1 - p)$$

- C'est un trinôme en p , de racines 0 et 1, de coefficient dominant négatif : son maximum est atteint au sommet, en $p = 0,5$.

$$V(X) = 100 \times 0,25 = 25$$

Conclusion. La dispersion est maximale quand les deux valeurs sont **équiprobables** : c'est la situation la plus incertaine. L'écart type vaut alors 5, soit la moitié de l'écart entre les deux valeurs.

Réponse. a) X est constante — b) $p = 0,5$, avec $V(X) = 25$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la machine à sous

a) **Gains algébriques** (mise de 1 € déduite) :

g_i	-1	0	4	19
$P(G = g_i)$	0,74	0,2	0,05	0,01

- **Contrôle** : $0,74 + 0,2 + 0,05 + 0,01 = 1 \checkmark$

— b) **Espérance** :

$$E(G) = -1 \times 0,74 + 0 \times 0,2 + 4 \times 0,05 + 19 \times 0,01$$

- **Calcul** : $-0,74 + 0 + 0,2 + 0,19 = -0,35$.

— Le joueur perd en moyenne 0,35 € par partie, soit **35 % de sa mise** : c'est l'ordre de grandeur réel de ces machines.

— c) **Espérance des carrés** :

$$E(G^2) = 1 \times 0,74 + 0 + 16 \times 0,05 + 361 \times 0,01 = 0,74 + 0,8 + 3,61 = 5,15$$

$$V(G) = 5,15 - (-0,35)^2 = 5,15 - 0,1225 = 5,0275$$

$$\sigma(G) = \sqrt{5,0275} \approx 2,24$$

Lecture finale. L'espérance est faiblement négative, mais l'écart type est **six fois plus grand** en valeur absolue : les grosses variations à court terme masquent la perte régulière. C'est exactement ce qui rend ces jeux addictifs.

Réponse. b) $E(G) = -0,35$ € par partie — c) $\sigma(G) \approx 2,24$ €.