# Plaquette 1 – Loi de probabilité

## Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Variable aléatoire.** Fonction $X$ qui associe un réel à chaque issue de l'univers. On note $(X = k)$ l'événement « $X$ prend la valeur $k$ ».

**Loi de probabilité de** $X$ : le tableau de toutes les valeurs $x_i$ et de leurs probabilités $p_i = P(X = x_i)$.

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

**La vérification obligatoire**, à faire à chaque fois :

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

**Méthode pour établir une loi, en trois temps.**

— **1.** Repérer **toutes** les valeurs que $X$ peut prendre.
— **2.** Pour chacune, décrire l'événement correspondant et calculer sa probabilité (dénombrement, arbre, tableau).
— **3.** Présenter le tableau et **contrôler** que la somme vaut 1.

**Événements cumulés.** $P(X \leq k)$ s'obtient en **additionnant** les probabilités des valeurs inférieures ou égales à $k$ ; de même

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

**Attention à la rédaction.** $X$ désigne la variable, $x_i$ ses valeurs : on écrit $P(X = 3)$, jamais $P(3)$.

## Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une loi de probabilité

Deux conditions sont nécessaires : chaque probabilité appartient à $[0\,;1]$, et **leur somme vaut** 1.

$$\sum p_i = 1 \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq p_i \leq 1$$

a) Somme : $0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1$ ✓ et toutes les valeurs sont dans $[0\,;1]$ : c'est bien une loi de probabilité.

b) Somme : $0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1{,}1 \neq 1$ : **ce n'est pas** une loi de probabilité.

c) La valeur $-0{,}1$ est **négative** : une probabilité ne peut pas l'être. Ce n'en est donc pas une, même si la somme vaut 1.

**Le réflexe à prendre.** La somme se vérifie en trois secondes et attrape la majorité des erreurs de calcul : on la contrôle **systématiquement**, y compris dans les exercices où la loi est à construire.

**Réponse.** a) oui — b) non (somme 1,1) — c) non (probabilité négative).

## Correction de l'exercice 2 – Une probabilité manquante

On utilise le fait que la somme des probabilités vaut 1 :

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Substitution** : $0{,}15 + 0{,}3 + P(X = 3) + 0{,}25 = 1$.
— **Somme des connues** : $0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}7$.
— **Isolement** :

$$P(X = 3) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

— **Contrôle** : $0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}25 = 1$ ✓

**Tableau complet de la loi :**

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,15 | 0,3 | 0,3 | 0,25 |

**Ce que la question teste.** La somme égale à 1 n'est pas qu'un contrôle : c'est une **équation** qui permet de retrouver une donnée manquante.

**Réponse.** $P(X = 3) = 0{,}3$.

## Correction de l'exercice 3 – La somme de deux dés

— a) La plus petite somme est $1 + 1 = 2$, la plus grande $6 + 6 = 12$ : $S$ prend toutes les valeurs entières de 2 à 12, soit **onze** valeurs.
— b) Il y a 36 issues équiprobables.
— **Somme égale à** 5 : les couples $(1\,;4)$, $(2\,;3)$, $(3\,;2)$ et $(4\,;1)$, soit 4 issues.

$$P(S = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$$

— **Somme égale à** 11 : les couples $(5\,;6)$ et $(6\,;5)$, soit 2 issues.

$$P(S = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0{,}056$$

**Attention au dénombrement.** Les couples $(1\,;4)$ et $(4\,;1)$ sont des issues **différentes** : les deux dés sont discernables, même s'ils ont la même couleur. Oublier cette distinction est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

**Ordre de grandeur.** Les sommes extrêmes (2 et 12) n'ont qu'une issue chacune ; la somme 7 en a six : c'est la plus probable.

**Réponse.** a) de 2 à 12 — b) $P(S = 5) = \frac{1}{9}$ et $P(S = 11) = \frac{1}{18}$.

## Correction de l'exercice 4 – La loi complète de la somme

On compte, pour chaque valeur, le nombre d'issues favorables parmi les 36 possibles.

| $s$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'issues | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $P(S = s)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

**Vérification de la somme** :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

donc la somme des probabilités vaut $\frac{36}{36} = 1$ ✓

**Ce que la loi montre.** La distribution est **symétrique** autour de 7, qui est la valeur la plus probable. C'est ce qui explique que 7 soit la somme de référence dans la plupart des jeux de dés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Méthode de comptage.** Pour une somme $s$ inférieure ou égale à 7, le nombre d'issues vaut $s - 1$ ; au-delà, il vaut $13 - s$.

**Réponse.** Loi symétrique autour de 7, avec $P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

## Correction de l'exercice 5 – Un jeu de hasard

a) L'urne contient $3 + 5 + 2 = 10$ boules, toutes équiprobables.

| $x_i$ | 0 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

— **Contrôle** : $0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1$ ✓

— b) L'événement $(X \geq 1)$ regroupe les valeurs 1 et 5 :

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 5) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$$

— **Autre méthode, par le contraire** : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ ✓

**Quand choisir le contraire ?** Quand il y a **moins de valeurs** à additionner de l'autre côté. Ici les deux méthodes se valent ; avec dix valeurs, le contraire devient bien plus rapide.

**Remarque de vocabulaire.** $(X \geq 1)$ se lit « $X$ est supérieure ou égale à 1 », et désigne un **événement**, pas un nombre.

**Réponse.** a) 0,3 ; 0,5 ; 0,2 — b) $P(X \geq 1) = 0{,}7$.

## Correction de l'exercice 6 – Des probabilités cumulées

— **Premier cumul** : on additionne les valeurs 1, 2 et 3.

$$P(X \leq 3) = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}3 = 0{,}65$$

— **Événement contraire** : $(X > 3)$ est le contraire de $(X \leq 3)$.

$$P(X > 3) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$$

— **Contrôle direct** : $0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$ ✓

— **Intervalle** : on additionne les valeurs 2, 3 et 4.

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}75$$

**Le piège des inégalités strictes.** $(X > 3)$ **exclut** la valeur 3, alors que $(X \geq 3)$ l'inclut :

$$P(X \geq 3) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}65$$

Deux résultats différents pour deux écritures presque identiques : on relit toujours le sens de l'inégalité avant d'additionner.

**Réponse.** $P(X \leq 3) = 0{,}65$, $P(X > 3) = 0{,}35$, $P(2 \leq X \leq 4) = 0{,}75$.

## Correction de l'exercice 7 – Le gain algébrique

**Attention au mot « algébrique »** : le gain tient compte de la **mise**, qu'il faut retrancher.

— Boule à 10 € : gain $10 - 2 = 8$ €, avec $P = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

— Boule à 3 € : gain $3 - 2 = 1$ €, avec $P = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

— Boule sans gain : gain $0 - 2 = -2$ €, avec $P = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

| $g_i$ | $-2$ | 1 | 8 |
|---|---|---|---|
| $P(G = g_i)$ | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

— **Contrôle** : $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$ ✓

**Probabilité de ne pas perdre d'argent** :

$$P(G \geq 0) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$$

Le joueur perd donc de l'argent dans 60 % des parties.

**L'erreur classique.** Oublier la mise et écrire les gains 0, 3 et 10 : la loi est alors fausse, et l'espérance calculée ensuite indiquera à tort un jeu favorable au joueur.

**Réponse.** $G$ vaut $-2$ ($p = 0{,}6$), 1 ($p = 0{,}3$) ou 8 ($p = 0{,}1$).

## Correction de l'exercice 8 – Deux tirages sans remise

$X$ peut valoir 0, 1 ou 2. Il y a 6 boules au premier tirage, 5 au second.

— $X = 0$ (deux noires) :

$$P(X = 0) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

— $X = 2$ (deux rouges) :

$$P(X = 2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

— $X = 1$ : deux chemins, rouge puis noire ou noire puis rouge.

$$P(X = 1) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30} + \frac{8}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{6}{15}$ |

— **Contrôle** : $\frac{1+8+6}{15} = \frac{15}{15} = 1$ ✓ (on a écrit $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$).

**Le point technique.** La valeur $X = 1$ correspond à **deux** chemins de l'arbre : on additionne leurs probabilités. Oublier l'un des deux fait chuter la somme sous 1 — d'où l'utilité du contrôle final.

**Réponse.** $P(X = 0) = \frac{1}{15}$, $P(X = 1) = \frac{8}{15}$, $P(X = 2) = \frac{6}{15}$.

## Correction de l'exercice 9 – Une loi avec un paramètre

a) **La somme des probabilités vaut** 1 :

$$a + 2a + 3a = 1 \Leftrightarrow 6a = 1$$

— Donc $a = \frac{1}{6}$.

— **Loi obtenue** :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ |

— **Contrôle** : chaque probabilité appartient bien à $[0\,;1]$, et leur somme vaut $\frac{6}{6} = 1$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— b) **Cumul** :

$$P(X \le 2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

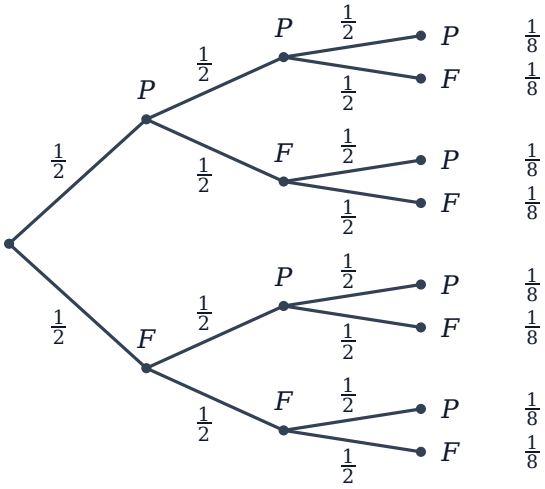
**Interprétation.** Les probabilités sont proportionnelles aux valeurs : la valeur 3 est trois fois plus probable que la valeur 1. Une telle loi modélise par exemple un tirage où chaque boule numérotée $k$ est présente en $k$ exemplaires.

**Réponse.** a) $a = \frac{1}{6}$ — b) $P(X \le 2) = \frac{1}{2}$.

## Correction de l'exercice 10 – Le nombre de piles

Il y a $2^3 = 8$ issues équiprobables, que l'on peut lister : PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF.

Sur l'arbre, chaque chemin a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ :




*P : pile, F : face*

— $X = 0$ : une seule issue, FFF.
— $X = 1$ : trois issues (PFF, FPF, FFP).
— $X = 2$ : trois issues (PPF, PFP, FPP).
— $X = 3$ : une seule issue, PPP.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

— **Contrôle** : $\frac{1+3+3+1}{8} = 1$ ✓

**La symétrie.** La loi est symétrique, car pile et face ont la même probabilité. Les nombres 1, 3, 3, 1 sont ceux du **triangle de Pascal** : ce sont les coefficients binomiaux $\binom{3}{k}$, que l'on retrouvera dans le chapitre sur la loi binomiale.

**Contrôle de cohérence** : $P(X \ge 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, ce qui est logique par symétrie avec $P(X \le 1)$.

**Réponse.** $\frac{1}{8}$ ; $\frac{3}{8}$ ; $\frac{3}{8}$ ; $\frac{1}{8}$ pour $X = 0, 1, 2, 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l’exercice 11 – Du tableau croisé à la loi

a) On divise chaque effectif par le total, 30.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{6}{30} = 0{,}2$ | $\frac{20}{30} \approx 0{,}667$ | $\frac{4}{30} \approx 0{,}133$ |

— **Contrôle** : $\frac{6 + 20 + 4}{30} = 1$ ✓

— b) **Au moins deux langues** :

$$P(X \geq 2) = \frac{20}{30} + \frac{4}{30} = \frac{24}{30} = 0{,}8$$

— **Par le contraire** : $1 - 0{,}2 = 0{,}8$ ✓

**Fréquences et probabilités.** Dans une situation d’équiprobabilité, la loi de probabilité **coïncide** avec le tableau des fréquences : c’est ce qui permet de passer des statistiques (ce qu’on observe) aux probabilités (ce qu’on modélise).

**Précision des résultats.** On garde les fractions exactes autant que possible : $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ est plus juste que 0,667.

**Réponse.** a) 0,2 ; $\frac{2}{3}$ ; $\frac{2}{15}$ — b) $P(X \geq 2) = 0{,}8$.

## Correction de l’exercice 12 – Le maximum de deux dés

**Méthode des cumuls, plus rapide que le comptage direct.**

— $(M \leq 3)$ signifie que les **deux** dés donnent au plus 3 : chacun a 3 possibilités sur 6.

$$P(M \leq 3) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

— De même, $P(M \leq 2) = \frac{2 \times 2}{36} = \frac{4}{36}$.

— **Différence** : $(M = 3)$ est l’événement « $M \leq 3$ mais pas $M \leq 2$ » :

$$P(M = 3) = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

— **Vérification par comptage** : les couples de maximum 3 sont (1 ; 3), (2 ; 3), (3 ; 3), (3 ; 2), (3 ; 1), soit bien 5 issues ✓

**La technique à retenir.** Pour un maximum, on calcule d’abord les **cumuls** $P(M \leq k) = \frac{k^2}{36}$, puis on soustrait : c’est nettement plus sûr que d’énumérer les couples.

**Réponse.** $P(M = 3) = \frac{5}{36}$ et $P(M \leq 3) = \frac{1}{4}$.

## Correction de l’exercice 13 – Une répartition à modéliser

a) **Effectif restant** : $200 - 80 - 70 - 40 = 10$ jours avec trois réclamations.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,4 | 0,35 | 0,2 | 0,05 |

— **Contrôle** : $0{,}4 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}05 = 1$ ✓

— b) **Au moins deux** :

$$P(X \geq 2) = 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}25$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Un jour sur quatre reçoit au moins deux réclamations.

**Modélisation.** On transforme ici des **fréquences observées** en probabilités : c'est légitime si l'on suppose que les conditions restent les mêmes. Le modèle serait à revoir en cas de campagne publicitaire ou de panne massive.

**Prolongement.** Sur une année de 250 jours ouvrés, on s'attend à environ $0{,}25 \times 250 \approx 63$ jours à au moins deux réclamations.

**Réponse.** a) 0,4 ; 0,35 ; 0,2 ; 0,05 — b) $P(X \geq 2) = 0{,}25$.

## Correction de l'exercice 14 – Deux variables sur la même expérience

a) Le dé est équilibré, donc chaque valeur a la probabilité $\frac{1}{6}$ :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

— b) $Y$ s'obtient en appliquant $y = 2x - 3$ à chaque valeur : $-1$, 1, 3, 5, 7, 9.

— La transformation est **strictement croissante** : à chaque valeur de $X$ correspond **une seule** valeur de $Y$, donc les probabilités se transportent sans se regrouper.

| $y_i$ | $-1$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = y_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

— **Contrôle** : la somme vaut 1 dans les deux cas ✓

**Attention.** Si l'on avait posé $Z = (X - 3)^2$, plusieurs valeurs de $X$ donneraient la même valeur de $Z$ ($X = 2$ et $X = 4$ donnent tous deux 1) : il faudrait alors **additionner** les probabilités correspondantes.

**Réponse.** $X$ : loi uniforme sur $\{1 ; \dots ; 6\}$ — $Y$ : loi uniforme sur $\{-1 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9\}$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la roue de loterie

— a) **Secteurs sans gain** : $12 - 1 - 2 - 4 = 5$.

— **Gains algébriques** (on retranche les 5 € de mise) :

| $g_i$ | $-5$ | $-3$ | 5 | 45 |
|---|---|---|---|---|
| Secteurs | 5 | 4 | 2 | 1 |
| $P(G = g_i)$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{4}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

— **Contrôle** : $\frac{5 + 4 + 2 + 1}{12} = 1$ ✓

— b) **Perdre de l'argent** signifie $G < 0$, soit les gains $-5$ et $-3$ :

$$P(G < 0) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$$

c) **Gagner de l'argent** :

$$P(G > 0) = \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

— **Contrôle** : $0{,}75 + 0{,}25 = 1$ ✓ — aucune valeur de $G$ n'est nulle ici.

**Lecture.** Le joueur perd dans trois parties sur quatre. Le secteur à 2 € est le plus trompeur : il donne l'impression de gagner alors que le joueur perd encore 3 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** b) $P(G < 0) = 0{,}75$ — c) $P(G > 0) = 0{,}25$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).