

Plaquette 1 - Loi de probabilité

Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Variable aléatoire. Fonction X qui associe un réel à chaque issue de l'univers. On note $(X = k)$ l'événement « X prend la valeur k ».

Loi de probabilité de X : le tableau de toutes les valeurs x_i et de leurs probabilités $p_i = P(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

La vérification obligatoire, à faire à chaque fois :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Méthode pour établir une loi, en trois temps.

- **1.** Repérer **toutes** les valeurs que X peut prendre.
- **2.** Pour chacune, décrire l'événement correspondant et calculer sa probabilité (dénombrement, arbre, tableau).
- **3.** Présenter le tableau et **contrôler** que la somme vaut 1.

Événements cumulés. $P(X \leq k)$ s'obtient en **additionnant** les probabilités des valeurs inférieures ou égales à k ; de même

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Attention à la rédaction. X désigne la variable, x_i ses valeurs : on écrit $P(X = 3)$, jamais $P(3)$.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une loi de probabilité

Deux conditions sont nécessaires : chaque probabilité appartient à $[0 ; 1]$, et **leur somme vaut 1**.

$$\sum p_i = 1 \quad \text{avec} \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

- a) Somme : $0,2 + 0,5 + 0,3 = 1$ ✓ et toutes les valeurs sont dans $[0 ; 1]$: c'est bien une loi de probabilité.
- b) Somme : $0,4 + 0,4 + 0,3 = 1,1 \neq 1$: **ce n'est pas** une loi de probabilité.
- c) La valeur $-0,1$ est **négative** : une probabilité ne peut pas l'être. Ce n'en est donc pas une, même si la somme vaut 1.

Le réflexe à prendre. La somme se vérifie en trois secondes et attrape la majorité des erreurs de calcul : on la contrôle **systématiquement**, y compris dans les exercices où la loi est à construire.

Réponse. a) oui — b) non (somme 1,1) — c) non (probabilité négative).

Correction de l'exercice 2 - Une probabilité manquante

On utilise le fait que la somme des probabilités vaut 1 :

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$$

- **Substitution** : $0,15 + 0,3 + P(X = 3) + 0,25 = 1$.
- **Somme des connues** : $0,15 + 0,3 + 0,25 = 0,7$.
- **Isolement** :

$$P(X = 3) = 1 - 0,7 = 0,3$$

- **Contrôle** : $0,15 + 0,3 + 0,3 + 0,25 = 1 \checkmark$

Tableau complet de la loi :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,15	0,3	0,3	0,25

Ce que la question teste. La somme égale à 1 n'est pas qu'un contrôle : c'est une **équation** qui permet de retrouver une donnée manquante.

Réponse. $P(X = 3) = 0,3$.

Correction de l'exercice 3 - La somme de deux dés

- a) La plus petite somme est $1 + 1 = 2$, la plus grande $6 + 6 = 12$: S prend toutes les valeurs entières de 2 à 12, soit **onze** valeurs.
- b) Il y a 36 issues équiprobables.
- **Somme égale à 5** : les couples $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$ et $(4; 1)$, soit 4 issues.

$$P(S = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0,111$$

- **Somme égale à 11** : les couples $(5; 6)$ et $(6; 5)$, soit 2 issues.

$$P(S = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0,056$$

Attention au dénombrement. Les couples $(1; 4)$ et $(4; 1)$ sont des issues **différentes** : les deux dés sont discernables, même s'ils ont la même couleur. Oublier cette distinction est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Ordre de grandeur. Les sommes extrêmes (2 et 12) n'ont qu'une issue chacune ; la somme 7 en a six : c'est la plus probable.

Réponse. a) de 2 à 12 — b) $P(S = 5) = \frac{1}{9}$ et $P(S = 11) = \frac{1}{18}$.

Correction de l'exercice 4 - La loi complète de la somme

On compte, pour chaque valeur, le nombre d'issues favorables parmi les 36 possibles.

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'issues	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$P(S = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Vérification de la somme :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

donc la somme des probabilités vaut $\frac{36}{36} = 1 \checkmark$

Ce que la loi montre. La distribution est **symétrique** autour de 7, qui est la valeur la plus probable. C'est ce qui explique que 7 soit la somme de référence dans la plupart des jeux de dés.

Méthode de comptage. Pour une somme s inférieure ou égale à 7, le nombre d'issues vaut $s - 1$; au-delà, il vaut $13 - s$.

Réponse. Loi symétrique autour de 7, avec $P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 5 - Un jeu de hasard

a) L'urne contient $3 + 5 + 2 = 10$ boules, toutes équiprobables.

x_i	0	1	5
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

— **Contrôle** : $0,3 + 0,5 + 0,2 = 1$ ✓

— b) L'événement $(X \geq 1)$ regroupe les valeurs 1 et 5 :

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 5) = 0,5 + 0,2 = 0,7$$

— **Autre méthode, par le contraire** : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,3 = 0,7$ ✓

Quand choisir le contraire ? Quand il y a **moins de valeurs** à additionner de l'autre côté. Ici les deux méthodes se valent ; avec dix valeurs, le contraire devient bien plus rapide.

Remarque de vocabulaire. $(X \geq 1)$ se lit « X est supérieure ou égale à 1 », et désigne un **événement**, pas un nombre.

Réponse. a) 0,3 ; 0,5 ; 0,2 — b) $P(X \geq 1) = 0,7$.

Correction de l'exercice 6 - Des probabilités cumulées

— **Premier cumul** : on additionne les valeurs 1, 2 et 3.

$$P(X \leq 3) = 0,1 + 0,25 + 0,3 = 0,65$$

— **Événement contraire** : $(X > 3)$ est le contraire de $(X \leq 3)$.

$$P(X > 3) = 1 - 0,65 = 0,35$$

— **Contrôle direct** : $0,2 + 0,15 = 0,35$ ✓

— **Intervalle** : on additionne les valeurs 2, 3 et 4.

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0,25 + 0,3 + 0,2 = 0,75$$

Le piège des inégalités strictes. $(X > 3)$ **exclut** la valeur 3, alors que $(X \geq 3)$ l'inclut :

$$P(X \geq 3) = 0,3 + 0,2 + 0,15 = 0,65$$

Deux résultats différents pour deux écritures presque identiques : on relit toujours le sens de l'inégalité avant d'additionner.

Réponse. $P(X \leq 3) = 0,65$, $P(X > 3) = 0,35$, $P(2 \leq X \leq 4) = 0,75$.

Correction de l'exercice 7 - Le gain algébrique

Attention au mot « algébrique » : le gain tient compte de la **mise**, qu'il faut retrancher.

— Boule à 10 € : gain $10 - 2 = 8$ €, avec $P = \frac{1}{10} = 0,1$.

— Boule à 3 € : gain $3 - 2 = 1$ €, avec $P = \frac{3}{10} = 0,3$.

— Boule sans gain : gain $0 - 2 = -2$ €, avec $P = \frac{6}{10} = 0,6$.

g_i	-2	1	8
$P(G = g_i)$	0,6	0,3	0,1

— **Contrôle** : $0,6 + 0,3 + 0,1 = 1 \checkmark$

Probabilité de ne pas perdre d'argent :

$$P(G \geq 0) = 0,3 + 0,1 = 0,4$$

Le joueur perd donc de l'argent dans 60 % des parties.

L'erreur classique. Oublier la mise et écrire les gains 0, 3 et 10 : la loi est alors fausse, et l'espérance calculée ensuite indiquera à tort un jeu favorable au joueur.

Réponse. G vaut -2 ($p = 0,6$), 1 ($p = 0,3$) ou 8 ($p = 0,1$).

Correction de l'exercice 8 - Deux tirages sans remise

X peut valoir 0, 1 ou 2. Il y a 6 boules au premier tirage, 5 au second.

— $X = 0$ (deux noires) :

$$P(X = 0) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

— $X = 2$ (deux rouges) :

$$P(X = 2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

— $X = 1$: deux chemins, rouge puis noire ou noire puis rouge.

$$P(X = 1) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30} + \frac{8}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

— **Contrôle** : $\frac{1 + 8 + 6}{15} = \frac{15}{15} = 1 \checkmark$ (on a écrit $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$).

Le point technique. La valeur $X = 1$ correspond à **deux** chemins de l'arbre : on additionne leurs probabilités. Oublier l'un des deux fait chuter la somme sous 1 — d'où l'utilité du contrôle final.

Réponse. $P(X = 0) = \frac{1}{15}$, $P(X = 1) = \frac{8}{15}$, $P(X = 2) = \frac{6}{15}$.

Correction de l'exercice 9 - Une loi avec un paramètre

a) **La somme des probabilités vaut 1 :**

$$a + 2a + 3a = 1 \Leftrightarrow 6a = 1$$

— Donc $a = \frac{1}{6}$.

— **Loi obtenue :**

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

— **Contrôle** : chaque probabilité appartient bien à $[0; 1]$, et leur somme vaut $\frac{6}{6} = 1 \checkmark$

— b) **Cumul** :

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Interprétation. Les probabilités sont proportionnelles aux valeurs : la valeur 3 est trois fois plus probable que la valeur 1. Une telle loi modélise par exemple un tirage où chaque boule numérotée k est présente en k exemplaires.

Réponse. a) $a = \frac{1}{6}$ — b) $P(X \leq 2) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Le nombre de piles

Il y a $2^3 = 8$ issues équiprobables, que l'on peut lister : PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF.

- $X = 0$: une seule issue, FFF.
- $X = 1$: trois issues (PPF, FPF, FFP).
- $X = 2$: trois issues (PPF, PFP, FPP).
- $X = 3$: une seule issue, PPP.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

— **Contrôle** : $\frac{1 + 3 + 3 + 1}{8} = 1 \checkmark$

La symétrie. La loi est symétrique, car pile et face ont la même probabilité. Les nombres 1, 3, 3, 1 sont ceux du **triangle de Pascal** : ce sont les coefficients binomiaux $\binom{3}{k}$, que l'on retrouvera dans le chapitre sur la loi binomiale.

Contrôle de cohérence : $P(X \geq 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, ce qui est logique par symétrie avec $P(X \leq 1)$.

Réponse. $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{8}$ pour $X = 0, 1, 2, 3$.

Correction de l'exercice 11 - Du tableau croisé à la loi

a) On divise chaque effectif par le total, 30.

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{30} = 0,2$	$\frac{20}{30} \approx 0,667$	$\frac{4}{30} \approx 0,133$

— **Contrôle** : $\frac{6 + 20 + 4}{30} = 1 \checkmark$

— b) **Au moins deux langues** :

$$P(X \geq 2) = \frac{20}{30} + \frac{4}{30} = \frac{24}{30} = 0,8$$

— **Par le contraire** : $1 - 0,2 = 0,8 \checkmark$

Fréquences et probabilités. Dans une situation d'équiprobabilité, la loi de probabilité **coïncide** avec le tableau des fréquences : c'est ce qui permet de passer des statistiques (ce qu'on observe) aux probabilités (ce qu'on modélise).

Précision des résultats. On garde les fractions exactes autant que possible : $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ est

plus juste que 0,667.

Réponse. a) $0,2$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{15}$ — b) $P(X \geq 2) = 0,8$.

Correction de l'exercice 12 - Le maximum de deux dés

Méthode des cumuls, plus rapide que le comptage direct.

— $(M \leq 3)$ signifie que les **deux** dés donnent au plus 3 : chacun a 3 possibilités sur 6.

$$P(M \leq 3) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

— De même, $P(M \leq 2) = \frac{2 \times 2}{36} = \frac{4}{36}$.

— **Différence** : $(M = 3)$ est l'événement « $M \leq 3$ mais pas $M \leq 2$ » :

$$P(M = 3) = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

— **Vérification par comptage** : les couples de maximum 3 sont $(1; 3)$, $(2; 3)$, $(3; 3)$, $(3; 2)$, $(3; 1)$, soit bien 5 issues ✓

La technique à retenir. Pour un maximum, on calcule d'abord les **cumuls**

$P(M \leq k) = \frac{k^2}{36}$, puis on soustrait : c'est nettement plus sûr que d'énumérer les couples.

Réponse. $P(M = 3) = \frac{5}{36}$ et $P(M \leq 3) = \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 13 - Une répartition à modéliser

a) **Effectif restant** : $200 - 80 - 70 - 40 = 10$ jours avec trois réclamations.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,4	0,35	0,2	0,05

— **Contrôle** : $0,4 + 0,35 + 0,2 + 0,05 = 1$ ✓

— b) **Au moins deux** :

$$P(X \geq 2) = 0,2 + 0,05 = 0,25$$

— Un jour sur quatre reçoit au moins deux réclamations.

Modélisation. On transforme ici des **fréquences observées** en probabilités : c'est légitime si l'on suppose que les conditions restent les mêmes. Le modèle serait à revoir en cas de campagne publicitaire ou de panne massive.

Prolongement. Sur une année de 250 jours ouvrés, on s'attend à environ $0,25 \times 250 \approx 63$ jours à au moins deux réclamations.

Réponse. a) $0,4$; $0,35$; $0,2$; $0,05$ — b) $P(X \geq 2) = 0,25$.

Correction de l'exercice 14 - Deux variables sur la même expérience

a) Le dé est équilibré, donc chaque valeur a la probabilité $\frac{1}{6}$:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

— b) Y s'obtient en appliquant $y = 2x - 3$ à chaque valeur : $-1, 1, 3, 5, 7, 9$.

- La transformation est **strictement croissante** : à chaque valeur de X correspond **une seule** valeur de Y , donc les probabilités se transportent sans se regrouper.

y_i	-1	1	3	5	7	9
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- **Contrôle** : la somme vaut 1 dans les deux cas ✓

Attention. Si l'on avait posé $Z = (X - 3)^2$, plusieurs valeurs de X donneraient la même valeur de Z ($X = 2$ et $X = 4$ donnent tous deux 1) : il faudrait alors **additionner** les probabilités correspondantes.

Réponse. X : loi uniforme sur $\{1; \dots; 6\}$ — Y : loi uniforme sur $\{-1; 1; 3; 5; 7; 9\}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la roue de loterie

- a) **Secteurs sans gain** : $12 - 1 - 2 - 4 = 5$.

- **Gains algébriques** (on retranche les 5 € de mise) :

g_i	-5	-3	5	45
Secteurs	5	4	2	1
$P(G = g_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

- **Contrôle** : $\frac{5+4+2+1}{12} = 1$ ✓

- b) **Perdre de l'argent** signifie $G < 0$, soit les gains -5 et -3 :

$$P(G < 0) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = 0,75$$

- c) **Gagner de l'argent** :

$$P(G > 0) = \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = 0,25$$

- **Contrôle** : $0,75 + 0,25 = 1$ ✓ — aucune valeur de G n'est nulle ici.

Lecture. Le joueur perd dans trois parties sur quatre. Le secteur à 2 € est le plus trompeur : il donne l'impression de gagner alors que le joueur perd encore 3 €.

Réponse. b) $P(G < 0) = 0,75$ — c) $P(G > 0) = 0,25$.