

Plaqueette 5 - Problèmes de synthèse : jeux, échantillons et simulations

Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Rappels de calcul.

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \quad V(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Transformation affine : $E(aX + b) = aE(X) + b$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$,
 $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

Somme de variables indépendantes de même loi (n répétitions) :

$$E(S_n) = nE(X) \quad V(S_n) = nV(X) \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$$

Moyenne d'un échantillon :

$$E(M_n) = E(X) \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n} \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

C'est la clé de la **mutualisation** : la moyenne se resserre en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Simulation en Python.

```
from random import random
```

```
def simule(p):
    if random() < p:
        return 1
    return 0
```

Sur N simulations, la **fréquence** observée approche la probabilité, et la **moyenne** observée approche l'espérance.

Interprétation de l'écart type.

- σ petit devant $E(X)$: résultat **prévisible**.
- σ grand devant $E(X)$: résultat **très fluctuant**, l'espérance seule ne suffit pas à décider.

Jeu équitable : $E(G) = 0$. Un jeu peut être équitable et pourtant très risqué (grand σ).

Correction de l'exercice 1 - Somme de deux variables

— **Un seul dé** : $E(X) = 3,5$ et $V(X) = \frac{35}{12} \approx 2,9167$.

— **Espérance de la somme** (linéarité) :

$$E(S) = 2 \times 3,5 = 7$$

— **Variance** (lancers **indépendants**) :

$$V(S) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \approx 5,8333$$

— **Écart type** : $\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4152$.

- **Contrôle par la loi complète** : $E(S^2) = \frac{1974}{36} \approx 54,8333$, donc $V(S) = 54,8333 - 49 = 5,8333$ ✓
 - **Erreur à éviter** : $\sigma(S) \neq 2\sigma(X)$, car $2 \times 1,7078 = 3,4157 \neq 2,4152$ — ce sont les **variances** qui s'ajoutent, pas les écarts types ✓
 - **Rapport** : $\frac{\sigma(S)}{\sigma(X)} = \sqrt{2} \approx 1,414$ ✓
 - **Avec 10 dés** : $E = 35$ et $\sigma = \sqrt{10} \times 1,7078 \approx 5,40$ — l'écart type croît bien en $\sqrt{n}$.
- Réponse.** $E(S) = 7$, $V(S) = \frac{35}{6} \approx 5,83$, $\sigma(S) \approx 2,42$.

Correction de l'exercice 2 - Moyenne d'un échantillon

- **Espérance de la moyenne** : elle **ne change pas**.
 $E(M_{36}) = 250$ g
- **Écart type de la moyenne** :
$$\sigma(M_{36}) = \frac{6}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1$$
 g
- **Lecture** : la moyenne d'un échantillon de 36 pièces fluctue **six fois moins** qu'une pièce isolée.
- **Intervalle typique** ($\pm 2\sigma$) : [248 ; 252] g pour la moyenne, contre [238 ; 262] g pour une pièce individuelle ✓
- **Masse totale** : $E(S_{36}) = 9000$ g et $\sigma(S_{36}) = \sqrt{36} \times 6 = 36$ g.
- **Contrôle** : $\sigma(M_{36}) = \frac{\sigma(S_{36})}{36} = \frac{36}{36} = 1$ ✓
- **Pour diviser encore par deux** l'écart type de la moyenne, il faudrait **quadrupler** l'échantillon, soit 144 pièces ✓
- **Application** : c'est pourquoi les contrôles industriels pèsent des **lots** plutôt que des pièces isolées.

Réponse. $E(M_{36}) = 250$ g et $\sigma(M_{36}) = 1$ g.

Correction de l'exercice 3 - Jeu équitable à construire

- **Probabilités** : 4 as sur 52, soit $\frac{1}{13}$; 12 figures sur 52, soit $\frac{3}{13}$; rien pour les 36 autres.
- **Contrôle** : $\frac{4 + 12 + 36}{52} = 1$ ✓
- **Gain brut moyen** :
$$E(\text{brut}) = 20 \times \frac{1}{13} + 5 \times \frac{3}{13} = \frac{20 + 15}{13} = \frac{35}{13} \approx 2,6923$$
 €
- **Mise d'équité** : $\frac{35}{13} \approx 2,69$ €.
- **Vérification** : avec cette mise, $E(G) = \frac{35}{13} - \frac{35}{13} = 0$ ✓
- **Écart type du gain** : $E(\text{brut}^2) = 400 \times \frac{1}{13} + 25 \times \frac{3}{13} = \frac{475}{13} \approx 36,538$.
- $V = 36,538 - 7,249 \approx 29,289$, donc $\sigma \approx 5,412$ € — **deux fois** la mise, le jeu est très volatil malgré son équité.
- **Sur 100 parties** : gain espéré nul, avec un écart type de $10 \times 5,412 \approx 54$ € — le résultat peut facilement s'écarter de ± 100 €.
- **Avec une mise de 3 €** : $E(G) = 2,6923 - 3 \approx -0,31$ € par partie, soit une marge de 10,3 % pour l'organisateur.

Réponse. Mise de $\frac{35}{13} \approx 2,69$ €.

Correction de l'exercice 4 - Deux investissements

Placement A.

$$E(G_A) = 100 \times 0,9 - 200 \times 0,1 = 90 - 20 = 70 \text{ €}$$

$$- E(G_A^2) = 10\,000 \times 0,9 + 40\,000 \times 0,1 = 9000 + 4000 = 13\,000.$$

$$- V(G_A) = 13\,000 - 4900 = 8100, \text{ donc } \sigma(G_A) = 90 \text{ €}.$$

Placement B.

$$E(G_B) = 50 \times 0,6 - 20 \times 0,4 = 30 - 8 = 22 \text{ €}$$

$$- E(G_B^2) = 2500 \times 0,6 + 400 \times 0,4 = 1500 + 160 = 1660.$$

$$- V(G_B) = 1660 - 484 = 1176, \text{ donc } \sigma(G_B) \approx 34,29 \text{ €}.$$

Comparaison.

- **Rendement** : A rapporte plus de **trois fois** plus (70 € contre 22 €).
- **Risque** : A est aussi environ **2{,}6 fois** plus volatil (90 € contre 34,29 €).
- **Ratio rendement/risque** : $\frac{70}{90} \approx 0,778$ pour A contre $\frac{22}{34,29} \approx 0,642$ pour B.
- **Conclusion** : A est meilleur sur les deux critères combinés, mais expose à une perte de 200 € une fois sur dix — le choix dépend de la **tolérance au risque** de l'investisseur.
- **Sur 10 placements A indépendants** : $E = 700$ € et $\sigma = \sqrt{10} \times 90 \approx 284,6$ € — la perte devient improbable ✓

Réponse. A : $E = 70$ €, $\sigma = 90$ € · B : $E = 22$ €, $\sigma \approx 34,3$ € — A est plus rentable et mieux rémunéré par unité de risque.

Correction de l'exercice 5 - Loi et simulation

- **Probabilité d'égalité** : il y a 4 couples identiques sur 16, donc

$$P(X = 10) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

- **Sinon** : $P(X = -2) = \frac{3}{4} = 0,75$.

- **Espérance** :

$$E(X) = 10 \times 0,25 - 2 \times 0,75 = 2,5 - 1,5 = 1$$

- **Moment d'ordre 2** : $E(X^2) = 100 \times 0,25 + 4 \times 0,75 = 25 + 3 = 28$.
- **Variance** : $V(X) = 28 - 1 = 27$, donc $\sigma(X) = \sqrt{27} \approx 5,196$.
- **Lecture** : l'espérance 1 est **favorable** au joueur, mais l'écart type dépasse 5 — il faut beaucoup de parties pour que l'avantage se manifeste.
- **Contrôle par simulation** : sur 10 000 appels, la moyenne observée doit être proche de 1, avec un écart type de la moyenne de $\frac{5,196}{100} \approx 0,052$ ✓
- **Mise d'équité** : le gain brut moyen est $10 \times 0,25 = 2,5$ € si l'on interprète le -2 comme une mise ; le jeu serait équitable avec une mise de 2,50 € au lieu de 2 €.
- **Piège de lecture** : $\text{randint}(1, 4)$ inclut les **deux** bornes, d'où 4 valeurs possibles et non 3 ✓

Réponse. $P(X = 10) = 0,25$, $P(X = -2) = 0,75$; $E(X) = 1$ et $V(X) = 27$.

Correction de l'exercice 6 - Nombre de succès

— **Loi** — on compte les chemins de l'arbre :

$$P(X = 0) = 0,6^3 = 0,216 \quad P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,36 = 0,432$$

$$P(X = 2) = 3 \times 0,16 \times 0,6 = 0,288 \quad P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064$$

— **Contrôle** : $0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1 \checkmark$

— **Espérance** :

$$E(X) = 0,432 + 2 \times 0,288 + 3 \times 0,064 = 0,432 + 0,576 + 0,192 = 1,2$$

— **Contrôle par la formule binomiale** : $np = 3 \times 0,4 = 1,2 \checkmark$

— **Moment d'ordre 2** : $0,432 + 4 \times 0,288 + 9 \times 0,064 = 0,432 + 1,152 + 0,576 = 2,16$.

— **Variance** : $V(X) = 2,16 - 1,44 = 0,72$.

— **Contrôle** : $np(1 - p) = 3 \times 0,4 \times 0,6 = 0,72 \checkmark$

— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{0,72} \approx 0,8485$.

— **Mode** : $X = 1$ (probabilité 0,432), juste en dessous de l'espérance 1,2 $\checkmark$

Réponse. 0,216 ; 0,432 ; 0,288 ; 0,064 — $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 0,72$.

Correction de l'exercice 7 - Espérance d'une durée

— **Loi en heures** : 0,5 avec 0,6 ; 1 avec 0,3 ; 2 avec 0,1.

— **Contrôle** : $0,6 + 0,3 + 0,1 = 1 \checkmark$

— **Espérance** :

$$E(T) = 0,5 \times 0,6 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,1 = 0,3 + 0,3 + 0,2 = 0,8 \text{ h}$$

— Soit 48 minutes en moyenne.

— **Moment d'ordre 2** : $0,25 \times 0,6 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,1 = 0,15 + 0,3 + 0,4 = 0,85$.

— **Variance** : $V(T) = 0,85 - 0,64 = 0,21$, donc $\sigma(T) \approx 0,4583 \text{ h}$, soit environ 27,5 min.

— **Vingt interventions** : $E = 20 \times 0,8 = 16 \text{ h}$ et $\sigma = \sqrt{20} \times 0,4583 \approx 2,05 \text{ h}$.

— **Intervalle typique** : $[16 - 4,1 ; 16 + 4,1]$, soit environ $[11,9 ; 20,1] \text{ h} \checkmark$

— **Planification** : prévoir 16 h serait risqué une fois sur deux ; prévoir 20 h couvre la quasi-totalité des journées.

— **Lecture** : la longue intervention de 2 h, bien que rare (10 %), pèse pour un quart de la durée moyenne $\checkmark$

Réponse. $E(T) = 0,8 \text{ h}$ (48 min), $\sigma(T) \approx 0,46 \text{ h}$; $16 \text{ h} \pm 2 \text{ h}$ pour 20 interventions.

Correction de l'exercice 8 - Variable centrée réduite

— **Écart type** : $\sigma(Y) = |a| \times 4 = 1$, donc $|a| = \frac{1}{4}$. On prend $a = 0,25$.

— **Espérance** : $E(Y) = 0,25 \times 20 + b = 5 + b = 0$, donc $b = -5$.

— **Transformation** :

$$Y = \frac{X - 20}{4} = 0,25X - 5$$

— **Contrôles** : $E(Y) = 0,25 \times 20 - 5 = 0 \checkmark$ et $V(Y) = 0,0625 \times 16 = 1 \checkmark$

— **Nom** : Y est la variable **centrée réduite** associée à X ; la formule générale est

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

- **Interprétation** : Y mesure l'écart à la moyenne **en nombre d'écarts types** — une valeur $X = 28$ donne $Y = 2$, soit « deux écarts types au-dessus ».
- **Autre solution** : $a = -0,25$ et $b = 5$ convient aussi pour les contraintes données, mais inverse le sens de variation — on retient par convention $a > 0$.
- **Usage** : cette normalisation permet de comparer des variables d'unités différentes (notes, tailles, prix).

Réponse. $a = 0,25$ et $b = -5$, soit $Y = \frac{X - 20}{4}$.

Correction de l'exercice 9 - Loi d'un écart

- **Dénombrement** sur les 36 couples :
 - $D = 0$: 6 cas (les doubles) ;
 - $D = 1$: 10 cas ; $D = 2$: 8 ; $D = 3$: 6 ; $D = 4$: 4 ; $D = 5$: 2.
 - **Contrôle** : $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$ ✓
 - **Règle** : pour $k \geq 1$, il y a $2(6 - k)$ cas.
 - **Espérance** :
- $$E(D) = \frac{0 \times 6 + 1 \times 10 + 2 \times 8 + 3 \times 6 + 4 \times 4 + 5 \times 2}{36} = \frac{10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} = \frac{70}{36} \approx 1,9444$$
- **Valeur la plus probable** : $D = 1$ avec $\frac{10}{36} \approx 0,2778$.
 - **Contrôle de cohérence** : $E(D) \approx 1,94$, plausible pour un écart entre deux nombres de 1 à 6 ✓
 - **Moment d'ordre 2** : $\frac{10 + 32 + 54 + 64 + 50}{36} = \frac{210}{36} \approx 5,8333$.
 - **Variance** : $V(D) = 5,8333 - 3,7809 \approx 2,0525$, donc $\sigma(D) \approx 1,4327$.
 - **Lien avec le maximum et le minimum** : $D = M - m$, et l'on retrouve
- $$E(D) = \frac{161}{36} - \frac{91}{36} = \frac{70}{36} \quad \checkmark$$

Réponse. $P(D = k) = \frac{2(6 - k)}{36}$ pour $k \geq 1$ et $\frac{6}{36}$ pour $k = 0$; $E(D) = \frac{70}{36} \approx 1,94$.

Correction de l'exercice 10 - Choix d'une stratégie de jeu

Option certaine. $E = 50$ € et $\sigma = 0$.

Option aléatoire.

$$E(G) = 200 \times 0,3 + 0 \times 0,7 = 60 \text{ €}$$

- $E(G^2) = 40\,000 \times 0,3 = 12\,000$, donc $V(G) = 12\,000 - 3600 = 8400$ et $\sigma(G) \approx 91,65$ €.

Comparaison.

- **En espérance** : l'option aléatoire est meilleure (60 € contre 50 €), soit +20 %.
- **En risque** : elle donne 0 € dans 70 % des cas — la majorité des joueurs repartiront les mains vides.
- **Médiane** : 0 € pour l'option aléatoire contre 50 € pour l'option certaine — un critère qui **inverse** la conclusion.
- **Répétition** : sur 100 parties, l'aléatoire rapporte 6000 € ± 917 € contre 5000 € garantis — là, l'aléatoire devient clairement préférable ✓
- **Conclusion** : pour **une** partie, l'option certaine est raisonnable ; pour un grand nombre de parties, l'option aléatoire domine.
- **Prime de risque** : il faudrait porter l'option certaine à 60 € pour égaliser les espérances ; la différence 10 € est ce que l'on « paie » pour la sécurité.

Réponse. Aléatoire : $E = 60$ € mais $\sigma \approx 92$ € et médiane 0 € — l'option certaine reste défendable sur une partie.

Correction de l'exercice 11 - Espérance d'un minimum

— **Tirages possibles** : $\binom{4}{2} = 6$ paires, toutes équiprobables.

— **Énumération** : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

— **Loi** :

$$P(m = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(m = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(m = 3) = \frac{1}{6}$$

— **Contrôle** : $\frac{3 + 2 + 1}{6} = 1$ ✓

— **Espérance** :

$$E(m) = \frac{1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1}{6} = \frac{3 + 4 + 3}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1,6667$$

— **Contrôle par le maximum** : par symétrie $k \mapsto 5 - k$, $E(M) = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,3333$.

— **Vérification** : $E(m) + E(M) = \frac{5 + 10}{3} = 5$, qui est bien l'espérance de la **somme** des deux jetons ($\frac{2 \times (1 + 2 + 3 + 4)}{4} = 5$) ✓

— **Variance** : $E(m^2) = \frac{3 + 8 + 9}{6} = \frac{20}{6} \approx 3,3333$, donc $V(m) = 3,3333 - 2,7778 \approx 0,5556$ et $\sigma(m) \approx 0,7454$.

— **Généralisation** : $P(m = k) = \frac{n - k}{\binom{n}{2}}$ pour un tirage de deux jetons parmi n ✓

Réponse. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$; $E(m) = \frac{5}{3} \approx 1,67$.

Correction de l'exercice 12 - Modélisation d'une remise

— **Loi de la remise** R (en pourcentage) : 30 avec 0,1 ; 10 avec 0,3 ; 0 avec 0,6.

— **Contrôle** : $0,1 + 0,3 + 0,6 = 1$ ✓

— **Remise moyenne** :

$$E(R) = 30 \times 0,1 + 10 \times 0,3 + 0 = 3 + 3 = 6 \%$$

— **Prix payé** : $P = 80 \left(1 - \frac{R}{100}\right) = 80 - 0,8R$.

— **Espérance du prix** (transformation affine) :

$$E(P) = 80 - 0,8 \times 6 = 80 - 4,8 = 75,20 \text{ €}$$

— **Contrôle direct** : $56 \times 0,1 + 72 \times 0,3 + 80 \times 0,6 = 5,6 + 21,6 + 48 = 75,2$ ✓

— **Écart type** : $E(R^2) = 900 \times 0,1 + 100 \times 0,3 = 90 + 30 = 120$, donc
 $V(R) = 120 - 36 = 84$ et $\sigma(R) \approx 9,165$ points.

— **Pour le prix** : $\sigma(P) = 0,8 \times 9,165 \approx 7,33$ €.

— **Intérêt commercial** : le magasin consent une remise moyenne de 6 %, bien moins coûteuse qu'une remise uniforme de 10 %, tout en offrant l'attrait d'un gros lot à 30 % ✓

Réponse. Remise moyenne 6 % ; prix moyen 75,20 €.

Correction de l'exercice 13 - Nombre de tirages

- $N = 1$: on gagne au premier coup, $P = \frac{2}{5} = 0,4$.
- $N = 2$: perdante puis gagnante, $P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,3$.
- $N = 3$: deux perdantes puis gagnante, $P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = 0,2$.
- $N = 4$: trois perdantes puis gagnante, $P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{6}{60} = 0,1$.
- **Contrôle** : $0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 1 \checkmark$
- **Espérance** :

$$E(N) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1 = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,4 = 2$$
- **Contrôle de cohérence** : N vaut au plus 4 (après quatre tirages, au moins une gagnante est sortie), et son espérance 2 est bien centrée $\checkmark$
- **Formule élégante** : $E(N) = \frac{n+1}{g+1} = \frac{6}{3} = 2$, où $n = 5$ est le nombre de boules et $g = 2$ celui de gagnantes $\checkmark$
- **Variance** : $E(N^2) = 0,4 + 1,2 + 1,8 + 1,6 = 5$, donc $V(N) = 5 - 4 = 1$ et $\sigma(N) = 1$.
- **Remarque** : la loi est **décroissante** par pas de 0,1 — une régularité qui facilite les contrôles.

Réponse. 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1 — $E(N) = 2$.

Correction de l'exercice 14 - Comparer théorie et simulation

- **Théorie** : $E(X) = 3,5$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,7078$.
- **Écart type de la moyenne** sur 10 000 lancers :

$$\sigma(M) = \frac{1,7078}{100} \approx 0,017078$$
- **Écart observé** : $|3,47 - 3,5| = 0,03$.
- **En unités d'écart type** : $\frac{0,03}{0,017078} \approx 1,757$.
- **Conclusion** : l'écart vaut environ $1,76\sigma$ — c'est **compatible** avec le hasard (on attend 95 % des simulations à moins de 2σ).
- **Intervalle typique** : $[3,5 - 0,034 ; 3,5 + 0,034] = [3,466 ; 3,534]$, qui contient bien 3,47 $\checkmark$
- **Si la moyenne avait été 3,20** : l'écart 0,30 vaudrait $17,6\sigma$ — là, le dé serait très certainement truqué.
- **Contrôle par Bienaymé-Tchebychev** :

$$P(|M - 3,5| \geq 0,03) \leq \frac{2,9167}{10\,000 \times 0,0009} \approx 0,324$$
 — une majoration large mais qui confirme que l'écart n'a rien d'exceptionnel $\checkmark$
- **Méthode** : toujours ramener un écart à un **nombre d'écarts types**, jamais le juger en valeur absolue.

Réponse. Oui : l'écart 0,03 vaut $1,76\sigma$, dans la fluctuation normale.

Correction de l'exercice 15 - Espérance et décision de stock

Stock de 1 unité.

- Demande 0 (0,2) : gain = -2 € (une invendue).
- Demande ≥ 1 (0,8) : gain = 10 €.

$$E = -2 \times 0,2 + 10 \times 0,8 = -0,4 + 8 = 7,6 \text{ €}$$

Stock de 2 unités.

- Demande 0 (0,2) : -4 € (deux invendues).
- Demande 1 (0,3) : $10 - 2 = 8$ €.
- Demande ≥ 2 (0,5) : 20 €.

$$E = -4 \times 0,2 + 8 \times 0,3 + 20 \times 0,5 = -0,8 + 2,4 + 10 = 11,6 \text{ €}$$

Conclusion. Le stock de 2 unités rapporte 4 € de plus en moyenne : il faut **stocker 2**.

- **Poussons à 3 unités :**
 $-6 \times 0,2 + 6 \times 0,3 + 18 \times 0,3 + 30 \times 0,2 = -1,2 + 1,8 + 5,4 + 6 = 12$ € — encore un peu mieux !
- **Vérification du gain marginal :** passer de 2 à 3 ne rapporte que 0,4 € contre 4 € de 1 à 2 — le rendement s'épuise.
- **Règle économique :** on augmente le stock tant que
 $10 \times P(\text{demande} \geq k) > 2 \times P(\text{demande} < k)$. Pour $k = 3$: $10 \times 0,2 = 2 > 2 \times 0,8 = 1,6$ ✓ ; il n'y a pas de $k = 4$ possible ici.
- **Demande moyenne :** $E = 0,3 + 0,6 + 0,6 = 1,5$ unité — mais l'optimum est de stocker **plus** que la moyenne, car la vente (10 €) rapporte bien plus que le stockage ne coûte (2 €) ✓

Réponse. Stocker 2 unités (11,60 € contre 7,60 €) — et même 3 donnerait 12 €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : contrôle de fabrication

a) **Demi-tolérance :** $50,6 - 50 = 0,6$ mm.

$$\frac{0,6}{0,3} = 2 \quad \text{soit } 2\sigma$$

b) **Majoration par Bienaymé-Tchebychev :**

$$P(|X - 50| \geq 0,6) \leq \frac{0,09}{0,36} = 0,25$$

- Au plus 25 % de pièces non conformes, donc **au moins** 75 % de conformes.
- **Commentaire :** cette borne est très pessimiste. Pour une loi normale, on aurait environ 4,6 % de rebuts — mais Tchebychev ne suppose **rien** sur la loi ✓

c) **Assemblage de 4 pièces** (indépendantes) :

$$E(S_4) = 4 \times 50 = 200 \text{ mm} \quad V(S_4) = 4 \times 0,09 = 0,36$$

$$\sigma(S_4) = \sqrt{0,36} = 0,6 \text{ mm}$$

- **Contrôle :** $\sigma(S_4) = \sqrt{4} \times 0,3 = 0,6$ ✓ — et non $4 \times 0,3 = 1,2$.
- **Lecture :** l'assemblage mesure 200 mm à $\pm 1,2$ mm près (à 2σ), soit une tolérance **relative** de 0,6 % contre 1,2 % pour une pièce seule.
- **Effet de compensation :** les écarts individuels se **compensent** partiellement, ce qui est une excellente nouvelle pour la mécanique — c'est pourquoi un assemblage est proportionnellement plus précis que ses composants.
- **Contrôle en tolérance relative :** $\frac{0,6}{200} = 0,3\%$ pour un écart type, contre $\frac{0,3}{50} = 0,6\%$ ✓ — division par 2 = $\sqrt{4}$.

Réponse. a) 2σ · b) au plus 25 % de rebuts · c) $E = 200$ mm et $\sigma = 0,6$ mm.