Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : jeux, échantillons et simulations

Variables aléatoires — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Rappels de calcul.

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \qquad V(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (E(X))^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Transformation affine : $E(aX+b) = aE(X)+b$, $V(aX+b) = a^2V(X)$, $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

Loi lue sur un arbre. On construit l'arbre pondéré, on calcule la probabilité de chaque chemin (produit des branches), puis on regroupe les chemins qui donnent la même valeur de X.

Probabilités conditionnelles. Sur une branche du second niveau, on lit $P_A(B)$; et

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Moyenne d'un échantillon. En simulant de nombreux échantillons de taille n, on observe qu'environ 95 % des moyennes sont à moins de $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ de l'espérance.

Simulation en Python.

```
from random import random

def simule(p):
    if random() < p:
        return 1
    return 0
```

Sur N simulations, la **fréquence** observée approche la probabilité, et la **moyenne** observée approche l'espérance.

Interprétation de l'écart type.

— σ petit devant $E(X)$: résultat **prévisible**.

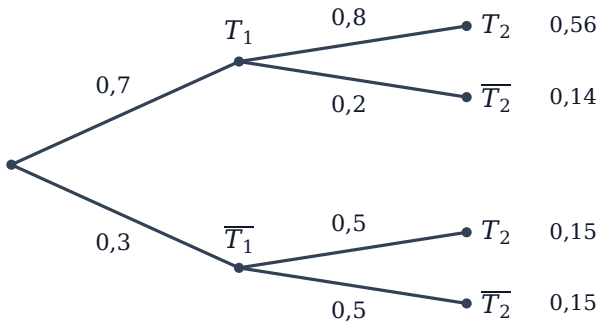
— σ grand devant $E(X)$: résultat **très fluctuant**, l'espérance seule ne suffit pas à décider.

Jeu équitable : $E(G) = 0$. Un jeu peut être équitable et pourtant très risqué (grand σ).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 1 – Deux tirs dépendants

a) Le second tir **dépend** du premier : les branches du second niveau portent des probabilités conditionnelles différentes.



T_i : la cible est touchée au tir i

— $X = 20$: chemin T_1T_2, $0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$;
— $X = 10$: chemins $T_1\overline{T_2}$ et $\overline{T_1}T_2$, $0{,}14 + 0{,}15 = 0{,}29$;
— $X = 0$: chemin $\overline{T_1}\,\overline{T_2}$, $0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$.

b) Calcul :

$$E(X) = 20 \times 0{,}56 + 10 \times 0{,}29 = 11{,}2 + 2{,}9 = 14{,}1$$

$E\left(X^2\right) = 400 \times 0{,}56 + 100 \times 0{,}29 = 253$, donc $V(X) = 253 - 14{,}1^2 = 54{,}19$ et $\sigma(X) \approx 7{,}36$.

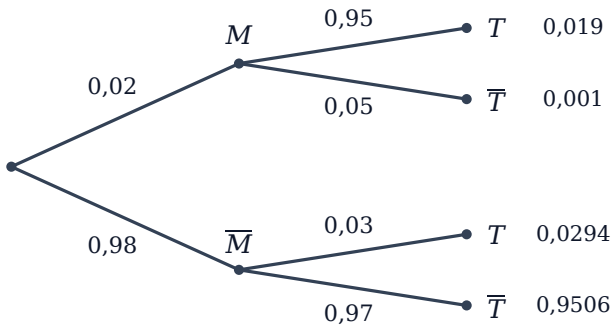
c) Calcul :

$$P_{\{X=10\}}(T_1) = \frac{P(T_1\overline{T_2})}{P(X=10)} = \frac{0{,}14}{0{,}29} = \frac{14}{29} \approx 0{,}483$$

Réponse. a) 0 : 0,15 ; 10 : 0,29 ; 20 : 0,56 — b) $E(X) = 14{,}1$, $\sigma(X) \approx 7{,}36$ — c) $\frac{14}{29} \approx 0{,}483$.

Correction de l’exercice 2 – Coût d’un dépistage

a) On construit l’arbre (premier niveau : état de santé ; second : résultat du test).



M : malade, T : test positif

$$P(T) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}019 + 0{,}0294 = 0{,}0484$$

b) $C = 90$ si le test est positif, $C = 10$ sinon :

c_i (€)	10	90
$P(C = c_i)$	0,9516	0,0484

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$E(C) = 10 \times 0{,}9516 + 90 \times 0{,}0484 = 9{,}516 + 4{,}356 = 13{,}872$$

$E\left(C^2\right) = 100 \times 0{,}9516 + 8100 \times 0{,}0484 = 487{,}2$, donc $V(C) = 487{,}2 - 13{,}872^2 \approx 294{,}77$ et $\sigma(C) \approx 17{,}17$ €.

c) Calcul :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}019}{0{,}0484} \approx 0{,}393$$

Lecture. Moins de 40 % des tests positifs concernent un malade : la maladie est rare, et les faux positifs des 98 % de sains pèsent lourd. D'où l'examen complémentaire.

Réponse. a) $P(T) = 0{,}0484$ — b) $E(C) \approx 13{,}87$ €, $\sigma(C) \approx 17{,}17$ € — c) $P_T(M) \approx 0{,}393$.

Correction de l'exercice 3 – Jeu équitable à construire

— **Probabilités** : 4 as sur 52, soit $\frac{1}{13}$; 12 figures sur 52, soit $\frac{3}{13}$; rien pour les 36 autres.

— **Contrôle** : $\frac{4 + 12 + 36}{52} = 1$ ✓

— **Gain brut moyen** :

$$E(\text{brut}) = 20 \times \frac{1}{13} + 5 \times \frac{3}{13} = \frac{20 + 15}{13} = \frac{35}{13} \approx 2{,}6923 \text{ €}$$

— **Mise d'équité** : $\frac{35}{13} \approx 2{,}69$ €.

— **Vérification** : avec cette mise, $E(G) = \frac{35}{13} - \frac{35}{13} = 0$ ✓

— **Écart type du gain** : $E\left(\text{brut}^2\right) = 400 \times \frac{1}{13} + 25 \times \frac{3}{13} = \frac{475}{13} \approx 36{,}538$.

— $V = 36{,}538 - 7{,}249 \approx 29{,}289$, donc $\sigma \approx 5{,}412$ € — **deux fois** la mise, le jeu est très volatil malgré son équité.

— **Sur** 100 **parties** : gain espéré nul, avec un écart type de $10 \times 5{,}412 \approx 54$ € — le résultat peut facilement s'écarter de ±100 €.

— **Avec une mise de** 3 **€** : $E(G) = 2{,}6923 - 3 \approx -0{,}31$ € par partie, soit une marge de 10,3 % pour l'organisateur.

Réponse. Mise de $\frac{35}{13} \approx 2{,}69$ €.

Correction de l'exercice 4 – Deux investissements

Placement A.

$$E(G_A) = 100 \times 0{,}9 - 200 \times 0{,}1 = 90 - 20 = 70 \text{ €}$$

— $E\left(G_A^2\right) = 10\,000 \times 0{,}9 + 40\,000 \times 0{,}1 = 9000 + 4000 = 13\,000$.

— $V(G_A) = 13\,000 - 4900 = 8100$, donc $\sigma(G_A) = 90$ €.

Placement B.

$$E(G_B) = 50 \times 0{,}6 - 20 \times 0{,}4 = 30 - 8 = 22 \text{ €}$$

— $E\left(G_B^2\right) = 2500 \times 0{,}6 + 400 \times 0{,}4 = 1500 + 160 = 1660$.

— $V(G_B) = 1660 - 484 = 1176$, donc $\sigma(G_B) \approx 34{,}29$ €.

Comparaison.

— **Rendement** : A rapporte plus de **trois fois** plus (70 € contre 22 €).

— **Risque** : A est aussi environ **2{,}6 fois** plus volatil (90 € contre 34,29 €).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Ratio rendement/risque** : $\frac{70}{90} \approx 0{,}778$ pour A contre $\frac{22}{34{,}29} \approx 0{,}642$ pour B.

— **Conclusion** : A est meilleur sur les deux critères combinés, mais expose à une perte de 200 € une fois sur dix — le choix dépend de la **tolérance au risque** de l'investisseur.

Réponse. A : $E = 70$ €, $\sigma = 90$ € · B : $E = 22$ €, $\sigma \approx 34{,}3$ € — A est plus rentable et mieux rémunéré par unité de risque.

Correction de l'exercice 5 – Loi et simulation

— **Probabilité d'égalité** : il y a 4 couples identiques sur 16, donc

$$P(X = 10) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

— **Sinon** : $P(X = -2) = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

— **Espérance** :

$$E(X) = 10 \times 0{,}25 - 2 \times 0{,}75 = 2{,}5 - 1{,}5 = 1$$

— **Moment d'ordre 2** : $E\left(X^2\right) = 100 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}75 = 25 + 3 = 28$.

— **Variance** : $V(X) = 28 - 1 = 27$, donc $\sigma(X) = \sqrt{27} \approx 5{,}196$.

— **Lecture** : l'espérance 1 est **favorable** au joueur, mais l'écart type dépasse 5 — il faut beaucoup de parties pour que l'avantage se manifeste.

— **Contrôle par simulation** : sur 10 000 appels, la moyenne observée doit être proche de 1, avec un écart type de la moyenne de $\frac{5{,}196}{100} \approx 0{,}052$ ✓

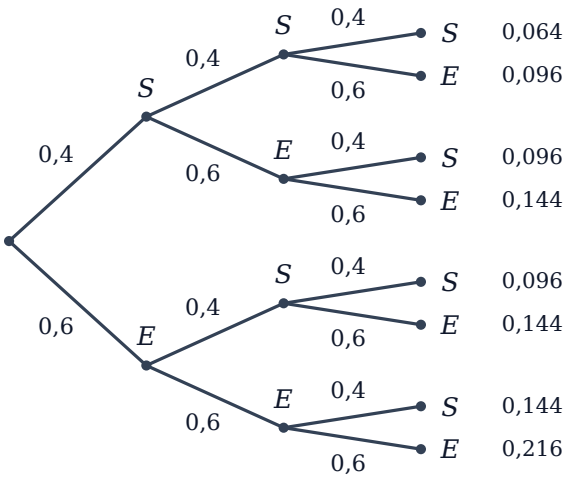
— **Mise d'équité** : le gain brut moyen est $10 \times 0{,}25 = 2{,}5$ € si l'on interprète le -2 comme une mise ; le jeu serait équitable avec une mise de 2,50 € au lieu de 2 €.

— **Piège de lecture** : *randint(1, 4)* inclut les **deux** bornes, d'où 4 valeurs possibles et non 3 ✓

Réponse. $P(X = 10) = 0{,}25$, $P(X = -2) = 0{,}75$; $E(X) = 1$ et $V(X) = 27$.

Correction de l'exercice 6 – Nombre de succès

Arbre pondéré des trois épreuves :



S : succès, E : échec

— **Loi** — on compte les chemins de l'arbre :

$$P(X = 0) = 0{,}6^3 = 0{,}216 \qquad P(X = 1) = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}36 = 0{,}432$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(X=2) = 3 \times 0{,}16 \times 0{,}6 = 0{,}288 \qquad P(X=3) = 0{,}4^3 = 0{,}064$$

— **Contrôle** : $0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$ ✓
— **Espérance** :

$$E(X) = 0{,}432 + 2 \times 0{,}288 + 3 \times 0{,}064 = 0{,}432 + 0{,}576 + 0{,}192 = 1{,}2$$

— **Contrôle par la formule binomiale** : $np = 3 \times 0{,}4 = 1{,}2$ ✓
— **Moment d'ordre 2** : $0{,}432 + 4 \times 0{,}288 + 9 \times 0{,}064 = 0{,}432 + 1{,}152 + 0{,}576 = 2{,}16$.
— **Variance** : $V(X) = 2{,}16 - 1{,}44 = 0{,}72$.
— **Contrôle** : $np(1-p) = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}72$ ✓
— **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{0{,}72} \approx 0{,}8485$.
— **Mode** : $X = 1$ (probabilité 0,432), juste en dessous de l'espérance 1,2 ✓

Réponse. 0,216 ; 0,432 ; 0,288 ; 0,064 — $E(X) = 1{,}2$ et $V(X) = 0{,}72$.

Correction de l'exercice 7 – Espérance d'une durée

— **Loi en heures** : 0,5 avec 0,6 ; 1 avec 0,3 ; 2 avec 0,1.
— **Contrôle** : $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$ ✓
— **Espérance** :

$$E(T) = 0{,}5 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}1 = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8 \text{ h}$$

— Soit 48 minutes en moyenne.
— **Moment d'ordre 2** : $0{,}25 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}1 = 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}85$.
— **Variance** : $V(T) = 0{,}85 - 0{,}64 = 0{,}21$, donc $\sigma(T) \approx 0{,}4583$ h, soit environ 27,5 min.
— **Vingt interventions** : $E = 20 \times 0{,}8 = 16$ h et $\sigma = \sqrt{20} \times 0{,}4583 \approx 2{,}05$ h.
— **Intervalle typique** : $[16 - 4{,}1\,;\,16 + 4{,}1]$, soit environ $[11{,}9\,;\,20{,}1]$ h ✓
— **Planification** : prévoir 16 h serait risqué une fois sur deux ; prévoir 20 h couvre la quasi-totalité des journées.
— **Lecture** : la longue intervention de 2 h, bien que rare (10 %), pèse pour un quart de la durée moyenne ✓

Réponse. $E(T) = 0{,}8$ h (48 min), $\sigma(T) \approx 0{,}46$ h ; 16 h ±2 h pour 20 interventions.

Correction de l'exercice 8 – Variable centrée réduite

— **Écart type** : $\sigma(Y) = |a| \times 4 = 1$, donc $|a| = \dfrac{1}{4}$. On prend $a = 0{,}25$.
— **Espérance** : $E(Y) = 0{,}25 \times 20 + b = 5 + b = 0$, donc $b = -5$.
— **Transformation** :

$$Y = \frac{X - 20}{4} = 0{,}25X - 5$$

— **Contrôles** : $E(Y) = 0{,}25 \times 20 - 5 = 0$ ✓ et $V(Y) = 0{,}0625 \times 16 = 1$ ✓
— **Nom** : Y est la variable **centrée réduite** associée à X ; la formule générale est

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

— **Interprétation** : Y mesure l'écart à la moyenne **en nombre d'écarts types** — une valeur $X = 28$ donne $Y = 2$, soit « deux écarts types au-dessus ».
— **Autre solution** : $a = -0{,}25$ et $b = 5$ convient aussi pour les contraintes données, mais inverse le sens de variation — on retient par convention $a > 0$.
— **Usage** : cette normalisation permet de comparer des variables d'unités différentes (notes, tailles, prix).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $a = 0{,}25$ et $b = -5$, soit $Y = \dfrac{X - 20}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Loi d'un écart

— **Dénombrement** sur les 36 couples :
— $D = 0$: 6 cas (les doubles) ;
— $D = 1$: 10 cas ; $D = 2$: 8 ; $D = 3$: 6 ; $D = 4$: 4 ; $D = 5$: 2.
— **Contrôle** : $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$ ✓
— **Règle** : pour $k \geq 1$, il y a $2(6 - k)$ cas.
— **Espérance** :

$$E(D) = \frac{0 \times 6 + 1 \times 10 + 2 \times 8 + 3 \times 6 + 4 \times 4 + 5 \times 2}{36} = \frac{10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} = \frac{70}{36} \approx 1{,}9444$$

— **Valeur la plus probable** : $D = 1$ avec $\dfrac{10}{36} \approx 0{,}2778$.
— **Contrôle de cohérence** : $E(D) \approx 1{,}94$, plausible pour un écart entre deux nombres de 1 à 6 ✓
— **Moment d'ordre 2** : $\dfrac{10 + 32 + 54 + 64 + 50}{36} = \dfrac{210}{36} \approx 5{,}8333$.
— **Variance** : $V(D) = 5{,}8333 - 3{,}7809 \approx 2{,}0525$, donc $\sigma(D) \approx 1{,}4327$.
— **Lien avec le maximum et le minimum** : $D = M - m$, et l'on retrouve $E(D) = \dfrac{161}{36} - \dfrac{91}{36} = \dfrac{70}{36}$ ✓

Réponse. $P(D = k) = \dfrac{2(6 - k)}{36}$ pour $k \geq 1$ et $\dfrac{6}{36}$ pour $k = 0$; $E(D) = \dfrac{70}{36} \approx 1{,}94$.

Correction de l'exercice 10 – Choix d'une stratégie de jeu

Option certaine. $E = 50$ € et $\sigma = 0$.

Option aléatoire.

$$E(G) = 200 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}7 = 60 \text{ €}$$

— $E\left(G^2\right) = 40\,000 \times 0{,}3 = 12\,000$, donc $V(G) = 12\,000 - 3600 = 8400$ et $\sigma(G) \approx 91{,}65$ €.

Comparaison.

— **En espérance** : l'option aléatoire est meilleure (60 € contre 50 €), soit +20 %.
— **En risque** : elle donne 0 € dans 70 % des cas — la majorité des joueurs repartiront les mains vides.
— **Médiane** : 0 € pour l'option aléatoire contre 50 € pour l'option certaine — un critère qui **inverse** la conclusion.
— **Répétition** : sur 100 parties, l'aléatoire rapporte 6000 € ±917 € contre 5000 € garantis — là, l'aléatoire devient clairement préférable ✓
— **Conclusion** : pour **une** partie, l'option certaine est raisonnable ; pour un grand nombre de parties, l'option aléatoire domine.
— **Prime de risque** : il faudrait porter l'option certaine à 60 € pour égaliser les espérances ; la différence 10 € est ce que l'on « paie » pour la sécurité.

Réponse. Aléatoire : $E = 60$ € mais $\sigma \approx 92$ € et médiane 0 € — l'option certaine reste défendable sur une partie.

Correction de l'exercice 11 – Espérance d'un minimum

— **Tirages possibles** : 6 paires, toutes équiprobables.
— **Énumération** : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Loi** :

$$P(m=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \qquad P(m=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad P(m=3)=\frac{1}{6}$$

— **Contrôle** : $\frac{3+2+1}{6}=1$ ✓

— **Espérance** :

$$E(m)=\frac{1\times 3+2\times 2+3\times 1}{6}=\frac{3+4+3}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\approx 1{,}6667$$

— **Contrôle par le maximum** : par symétrie $k\mapsto 5-k$, $E(M)=5-\frac{5}{3}=\frac{10}{3}\approx 3{,}3333$.

— **Vérification** : $E(m)+E(M)=\frac{5+10}{3}=5$, qui est bien l'espérance de la **somme** des deux jetons ($\frac{2\times(1+2+3+4)}{4}=5$) ✓

— **Variance** : $E\left(m^2\right)=\frac{3+8+9}{6}=\frac{20}{6}\approx 3{,}3333$, donc $V(m)=3{,}3333-2{,}7778\approx 0{,}5556$ et $\sigma(m)\approx 0{,}7454$.

Réponse. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$; $E(m)=\frac{5}{3}\approx 1{,}67$.

Correction de l'exercice 12 – Modélisation d'une remise

— **Loi de la remise** R (en pourcentage) : 30 avec 0,1 ; 10 avec 0,3 ; 0 avec 0,6.

— **Contrôle** : $0{,}1+0{,}3+0{,}6=1$ ✓

— **Remise moyenne** :

$$E(R)=30\times 0{,}1+10\times 0{,}3+0=3+3=6\,\%$$

— **Prix payé** : $P=80\left(1-\frac{R}{100}\right)=80-0{,}8R$.

— **Espérance du prix** (transformation affine) :

$$E(P)=80-0{,}8\times 6=80-4{,}8=75{,}20\ €$$

— **Contrôle direct** : $56\times 0{,}1+72\times 0{,}3+80\times 0{,}6=5{,}6+21{,}6+48=75{,}2$ ✓

— **Écart type** : $E\left(R^2\right)=900\times 0{,}1+100\times 0{,}3=90+30=120$, donc $V(R)=120-36=84$ et $\sigma(R)\approx 9{,}165$ points.

— **Pour le prix** : $\sigma(P)=0{,}8\times 9{,}165\approx 7{,}33$ €.

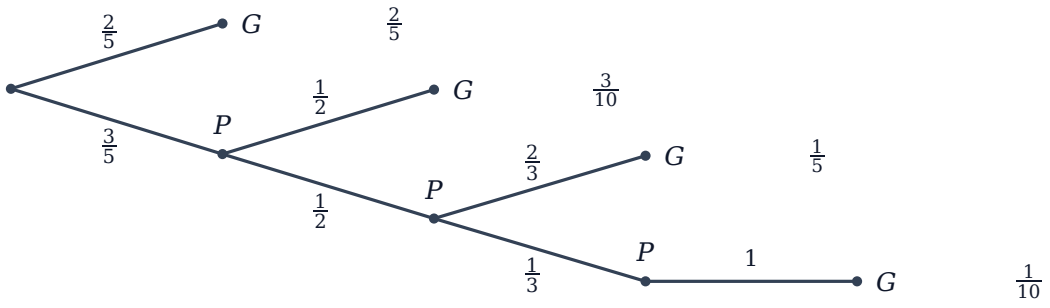
— **Intérêt commercial** : le magasin consent une remise moyenne de 6 %, bien moins coûteuse qu'une remise uniforme de 10 %, tout en offrant l'attrait d'un gros lot à 30 % ✓

Réponse. Remise moyenne 6 % ; prix moyen 75,20 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Nombre de tirages

Arbre pondéré : on s’arrête à la première gagnante.



G : gagnante, P : perdante — sans remise

— $N = 1$: on gagne au premier coup, $P = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

— $N = 2$: perdante puis gagnante, $P = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{6}{20} = 0{,}3$.

— $N = 3$: deux perdantes puis gagnante, $P = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{12}{60} = 0{,}2$.

— $N = 4$: trois perdantes puis gagnante, $P = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{6}{60} = 0{,}1$.

— **Contrôle** : $0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$ ✓

— **Espérance** :

$$E(N) = 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}1 = 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}4 = 2$$

— **Contrôle de cohérence** : N vaut au plus 4 (après quatre tirages, au moins une gagnante est sortie), et son espérance 2 est bien centrée ✓

— **Variance** : $E\left(N^2\right) = 0{,}4 + 1{,}2 + 1{,}8 + 1{,}6 = 5$, donc $V(N) = 5 - 4 = 1$ et $\sigma(N) = 1$.

— **Remarque** : la loi est **décroissante** par pas de 0,1 — une régularité qui facilite les contrôles.

Réponse. 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1 — $E(N) = 2$.

Correction de l’exercice 14 – Comparer théorie et simulation

Théorie. Pour un dé équilibré, $E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{35}{12}} \approx 1{,}708$.

Critère d’échantillonnage. Quand on simule de nombreux échantillons de taille n, on observe qu’environ 95 % des moyennes obtenues sont à moins de $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ de l’espérance. Ici :

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 1{,}708}{\sqrt{10\,000}} \approx 0{,}034$$

Écart observé. $|3{,}47 - 3{,}5| = 0{,}03 < 0{,}034$.

Conclusion. La moyenne observée est dans l’intervalle $[3{,}466\,;\,3{,}534]$ où tombent la plupart des simulations : le résultat est **compatible** avec un dé équilibré.

Contre-exemple. Une moyenne de 3,20 s’écarterait de 0,30, soit près de neuf fois la marge : on soupçonnerait fortement un dé truqué.

Réponse. Oui : l’écart 0,03 est inférieur à $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0{,}034$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Espérance et décision de stock

Stock de 1 **unité.**

— Demande 0 (0,2) : gain = −2 € (une invendue).
— Demande ≥ 1 (0,8) : gain = 10 €.

$$E = -2 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}8 = -0{,}4 + 8 = 7{,}6 \text{ €}$$

Stock de 2 **unités.**

— Demande 0 (0,2) : −4 € (deux invendues).
— Demande 1 (0,3) : 10 − 2 = 8 €.
— Demande ≥ 2 (0,5) : 20 €.

$$E = -4 \times 0{,}2 + 8 \times 0{,}3 + 20 \times 0{,}5 = -0{,}8 + 2{,}4 + 10 = 11{,}6 \text{ €}$$

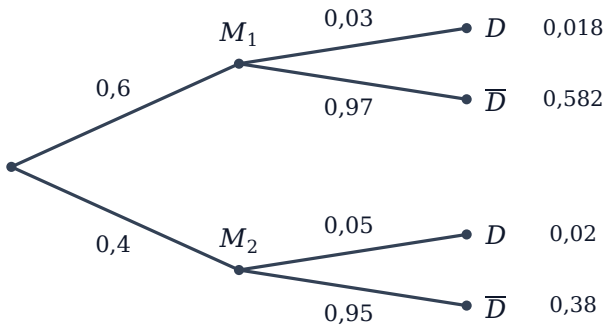
Conclusion. Le stock de 2 unités rapporte 4 € de plus en moyenne : il faut **stocker 2**.

— **Poussons à** 3 **unités** :
$-6 \times 0{,}2 + 6 \times 0{,}3 + 18 \times 0{,}3 + 30 \times 0{,}2 = -1{,}2 + 1{,}8 + 5{,}4 + 6 = 12$ € — encore un peu mieux !
— **Vérification du gain marginal** : passer de 2 à 3 ne rapporte que 0,4 € contre 4 € de 1 à 2 — le rendement s'épuise.
— **Règle économique** : on augmente le stock tant que $10 \times P(\text{demande} \geq k) > 2 \times P(\text{demande} < k)$. Pour $k = 3$: $10 \times 0{,}2 = 2 > 2 \times 0{,}8 = 1{,}6$ ✓ ; il n'y a pas de $k = 4$ possible ici.
— **Demande moyenne** : $E = 0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}5$ unité — mais l'optimum est de stocker **plus** que la moyenne, car la vente (10 €) rapporte bien plus que le stockage ne coûte (2 €) ✓

Réponse. Stocker 2 unités (11,60 € contre 7,60 €) — et même 3 donnerait 12 €.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : contrôle de fabrication

a) On construit l'arbre : premier niveau, la machine ; second niveau, l'état de la pièce.



D : pièce défectueuse

$$P(D) = 0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}018 + 0{,}02 = 0{,}038$$

b) $B = -8$ avec la probabilité 0,038 et $B = 12$ avec la probabilité 0,962.

$$E(B) = 12 \times 0{,}962 - 8 \times 0{,}038 = 11{,}544 - 0{,}304 = 11{,}24$$

$E\left(B^2\right) = 144 \times 0{,}962 + 64 \times 0{,}038 = 140{,}96$, donc $V(B) = 140{,}96 - 11{,}24^2 = 14{,}6224$ et $\sigma(B) \approx 3{,}82$ €.

c) Calcul :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P_D(M_2) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}038} = \frac{10}{19} \approx 0{,}526$$

M_2 ne fait que 40 % des pièces mais plus de la moitié des défauts.

d) Sur 1000 pièces : $1000 \times 11{,}24 = 11\,240$ € en moyenne.

Réponse. a) $P(D) = 0{,}038$ — b) $E(B) = 11{,}24$ €, $\sigma(B) \approx 3{,}82$ € — c) $\frac{10}{19} \approx 0{,}526$ — d) 11 240 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).