Plaquette 4 – Déterminer une loi, calculer espérance, variance et écart type

Variables aléatoires — Première spé maths

Exercices

Méthode

On **dresse la loi** dans un tableau (en contrôlant que la somme vaut 1), puis on calcule **espérance**, **variance** (par König-Huygens) et **écart type**.

Exercice 1 – Loi d'une variable simple

Une urne contient 3 boules marquées 1, 2 boules marquées 5 et 1 boule marquée 10. On tire une boule et X est le nombre lu. Donner la loi de X, puis $E(X)$.

Exercice 2 – Espérance et variance

X prend les valeurs -1, 2, 4 avec les probabilités 0,5, 0,3 et 0,2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 3 – Paramètre manquant

X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 avec les probabilités 0,1, a, 0,3 et $2a$. Déterminer a puis $E(X)$.

Exercice 4 – Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés et S est la somme. Donner $P(S = 5)$, $P(S \leq 4)$ et $E(S)$.

Exercice 5 – Gain d'un jeu

On mise 3 €. On gagne 10 € si l'on tire un as d'un jeu de 32 cartes, 5 € si l'on tire une figure (roi, dame, valet), rien sinon. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 6 – Transformation affine

On sait que $E(X) = 12$ et $\sigma(X) = 3$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ pour $Y = -2X + 5$.

Exercice 7 – Loi à partir d'une expérience

On tire deux boules sans remise d'une urne contenant 4 blanches et 2 noires. Soit X le nombre de blanches obtenues. Donner la loi de X et $E(X)$.

Exercice 8 – Comparaison de deux jeux

Jeu A : on gagne 2 € avec la probabilité 0,5 et on perd 1 € sinon. Jeu B : on gagne 10 € avec la probabilité 0,1 et on perd 1 € sinon. Comparer les deux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Loi uniforme

Un dé équilibré à 6 faces. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ pour le résultat X.

Exercice 10 – Une dépense lue sur un arbre

Un magasin vend deux modèles : A à 200 € et B à 120 €. Un client achète A avec la probabilité 0,6, sinon B. Il ajoute une extension de garantie à 30 € avec la probabilité 0,3 s'il a pris A, et 0,5 s'il a pris B. On note X la dépense du client.

a) Construire l'arbre pondéré et donner la loi de X.

b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

c) Calculer la probabilité qu'un client prenne la garantie.

Exercice 11 – Espérance d'un maximum

On lance deux dés et M est le plus grand résultat. Calculer $P(M = 6)$ et $E(M)$.

Exercice 12 – Prime d'assurance

Un sinistre coûte 2000 € et survient avec la probabilité 0,04. Quelle prime l'assureur doit-il demander pour espérer un bénéfice de 30 € par contrat ?

Exercice 13 – Variable indicatrice

Soit X la variable valant 1 si un événement de probabilité p se réalise, 0 sinon. Calculer $E(X)$ et $V(X)$, puis déterminer p maximisant la variance.

Exercice 14 – Loi et médiane

X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 avec les probabilités 0,1 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,2 ; 0,1. Déterminer $E(X)$, le mode et la médiane.

Exercice 15 – Espérance conditionnelle simple

Une machine produit une pièce valant 10 € si elle est bonne (95 % des cas) et coûtant 2 € de retraitement sinon. Calculer le gain espéré par pièce sur 1000 pièces.

Exercice 16 – Synthèse : loterie

Une loterie vend 500 billets à 4 € : un lot de 500 €, cinq lots de 50 € et vingt lots de 10 €.

a) Donner la loi du gain algébrique G d'un joueur.

b) Calculer $E(G)$ et interpréter.

c) Calculer $\sigma(G)$ et le bénéfice de l'organisateur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).