

Plaquette 4 – Déterminer une loi, calculer espérance, variance et écart type

Variables aléatoires — Première spé maths

Exercices

Méthode

On **dresse la loi** dans un tableau (en contrôlant que la somme vaut 1), puis on calcule **espérance**, **variance** (par König-Huygens) et **écart type**.

Exercice 1 – Loi d’une variable simple

Une urne contient 3 boules marquées 1, 2 boules marquées 5 et 1 boule marquée 10. On tire une boule et X est le nombre lu. Donner la loi de X , puis $E(X)$.

Exercice 2 – Espérance et variance

X prend les valeurs $-1, 2, 4$ avec les probabilités $0,5, 0,3$ et $0,2$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 3 – Paramètre manquant

X prend les valeurs $0, 1, 2, 3$ avec les probabilités $0,1, a, 0,3$ et $2a$. Déterminer a puis $E(X)$.

Exercice 4 – Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés et S est la somme. Donner $P(S = 5)$, $P(S \leq 4)$ et $E(S)$.

Exercice 5 – Gain d’un jeu

On mise 3 €. On gagne 10 € si l’on tire un as d’un jeu de 32 cartes, 5 € si l’on tire une figure (roi, dame, valet), rien sinon. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 6 – Transformation affine

On sait que $E(X) = 12$ et $\sigma(X) = 3$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ pour $Y = -2X + 5$.

Exercice 7 – Loi à partir d’une expérience

On tire deux boules sans remise d’une urne contenant 4 blanches et 2 noires. Soit X le nombre de blanches obtenues. Donner la loi de X et $E(X)$.

Exercice 8 – Comparaison de deux jeux

Jeu A : on gagne 2 € avec la probabilité $0,5$ et on perd 1 € sinon. Jeu B : on gagne 10 € avec la probabilité $0,1$ et on perd 1 € sinon. Comparer les deux.

Exercice 9 - Loi uniforme

Un dé équilibré à 6 faces. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ pour le résultat X .

Exercice 10 - Espérance d'une somme

Deux variables indépendantes vérifient $E(X) = 5$, $V(X) = 4$, $E(Y) = 3$ et $V(Y) = 9$. Calculer $E(X + Y)$, $V(X + Y)$ et $\sigma(X + Y)$.

Exercice 11 - Espérance d'un maximum

On lance deux dés et M est le plus grand résultat. Calculer $P(M = 6)$ et $E(M)$.

Exercice 12 - Prime d'assurance

Un sinistre coûte 2000 € et survient avec la probabilité 0,04. Quelle prime l'assureur doit-il demander pour espérer un bénéfice de 30 € par contrat ?

Exercice 13 - Variable indicatrice

Soit X la variable valant 1 si un événement de probabilité p se réalise, 0 sinon. Calculer $E(X)$ et $V(X)$, puis déterminer p maximisant la variance.

Exercice 14 - Loi et médiane

X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 avec les probabilités 0,1 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,2 ; 0,1. Déterminer $E(X)$, le mode et la médiane.

Exercice 15 - Espérance conditionnelle simple

Une machine produit une pièce valant 10 € si elle est bonne (95 % des cas) et coûtant 2 € de retraitement sinon. Calculer le gain espéré par pièce sur 1000 pièces.

Exercice 16 - Synthèse : loterie

Une loterie vend 500 billets à 4 € : un lot de 500 €, cinq lots de 50 € et vingt lots de 10 €.

- Donner la loi du gain algébrique G d'un joueur.
- Calculer $E(G)$ et interpréter.
- Calculer $\sigma(G)$ et le bénéfice de l'organisateur.