

Plaquelette 3 – Écart-type

Variables aléatoires – Première spé maths

Exercices

Méthode

L'écart type ramène la variance à la **même unité** que la variable : c'est lui qui s'interprète. On apprend à le calculer, à le comparer d'une situation à l'autre, à comprendre l'effet d'un changement d'unité, et à s'en servir pour mesurer un **risque**.

Exercice 1 – Un premier écart type

La loi de X est donnée par le tableau suivant.

x_i	2	4	9
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, arrondi au centième.

Exercice 2 – L'unité de l'écart type

Le gain G d'un joueur, en euros, vérifie $E(G) = 3$ € et $V(G) = 16$.

- Quelle est l'unité de $V(G)$? Celle de $\sigma(G)$?
- Calculer $\sigma(G)$ et interpréter.

Exercice 3 – Changer d'unité

La masse X de pièces, en grammes, vérifie $E(X) = 250$ g et $\sigma(X) = 6$ g.

- On exprime ces masses en kilogrammes : soit $Y = 0,001X$. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
- On mesure maintenant l'écart à la valeur cible : $Z = X - 250$. Calculer $E(Z)$ et $\sigma(Z)$.

Exercice 4 – Comparer deux productions

Deux machines remplissent des bouteilles de 1 L. Pour la machine A, le volume a pour espérance 1000 mL et pour écart type 4 mL ; pour la machine B, espérance 1002 mL et écart type 12 mL.

Quelle machine est préférable ? Justifier.

Exercice 5 – Écart type d'une variable à deux valeurs

Une variable X vaut 0 avec la probabilité 0,8 et 50 avec la probabilité 0,2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 6 – Quand la dispersion est maximale

Une variable X vaut 0 ou 1, avec $P(X = 1) = p$.

- Exprimer $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de p .

b) Pour quelle valeur de p l'écart type est-il maximal ?

Exercice 7 - Le coefficient de variation

Un placement rapporte en moyenne 200 € avec un écart type de 50 €. Un autre rapporte en moyenne 2000 € avec un écart type de 300 €.

Lequel est le plus risqué, relativement à son rendement ?

Exercice 8 - Retrouver une loi

Une variable X prend les valeurs -2 et a , avec $P(X = -2) = 0,6$.

On sait que $E(X) = 1$. Déterminer a , puis $\sigma(X)$.

Exercice 9 - Le contrôle des pièces

Le diamètre D de pièces usinées, en millimètres, a pour espérance 20 mm et pour écart type 0,05 mm. Une pièce est conforme si son diamètre appartient à $[19,9; 20,1]$.

a) Exprimer cet intervalle en nombre d'écarts types autour de la moyenne.

b) L'atelier règle une nouvelle machine dont l'écart type vaut 0,08 mm. Le même intervalle représente combien d'écarts types ?

Exercice 10 - Espérance égale, risques différents

Deux jeux ont la même espérance de gain, nulle. Dans le jeu A , on gagne ou perd 1 € avec la même probabilité. Dans le jeu B , on gagne 100 € avec une probabilité de 0,5 et on perd 100 € sinon.

Calculer les écarts types et commenter.

Exercice 11 - Écart type d'un gain de jeu

Un jeu de dé coûte 2 €. On gagne 10 € si le dé affiche 6, rien sinon.

Calculer $E(G)$ et $\sigma(G)$, arrondi au centième.

Exercice 12 - Deux transformations successives

On sait que $E(X) = 10$ et $\sigma(X) = 2$.

Calculer l'espérance et l'écart type de $Y = -4X + 7$.

Exercice 13 - Le temps de trajet

Le temps de trajet T d'un bus, en minutes, a pour loi :

t_i	20	25	30	45
$P(T = t_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

a) Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$, arrondis au dixième.

b) Un usager doit arriver dans 40 minutes. Est-ce prudent de prendre ce bus ?

Exercice 14 - Réduire la dispersion

Un investisseur place 1000 € sur un actif dont le rendement R (en euros) vérifie $E(R) = 60$ et $\sigma(R) = 200$.

- a) Que deviennent l'espérance et l'écart type s'il ne place que 500 € (le rendement est proportionnel au capital) ?
- b) Le rapport $\frac{\sigma}{E}$ a-t-il changé ?

Exercice 15 - Synthèse : trois jeux au choix

Trois jeux coûtent 5 € la partie.

- Jeu A : rapporte 6 € avec une probabilité de 0,8, rien sinon.
- Jeu B : rapporte 25 € avec une probabilité de 0,2, rien sinon.
- Jeu C : rapporte 5 € à coup sûr.

Calculer l'espérance et l'écart type du gain algébrique de chaque jeu, puis conseiller un joueur.