

Plaquette 2 – Espérance et variance

Variables aléatoires – Première spé maths

Exercices

Méthode

L'espérance est la **valeur moyenne** obtenue en répétant l'expérience un grand nombre de fois ; la variance mesure la **dispersion** autour de cette moyenne. On calcule les deux à partir du tableau de la loi, on les interprète, et on s'en sert pour décider si un jeu est équitable.

Exercice 1 – Une première espérance

La loi de X est donnée par le tableau suivant.

x_i	1	2	5
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2

Calculer $E(X)$.

Exercice 2 – Espérance d'un dé

On lance un dé équilibré à six faces et on note X le résultat.

- Calculer $E(X)$.
- Ce résultat est-il une valeur possible du dé ? Commenter.

Exercice 3 – Calculer une variance

Avec la loi de X du premier exercice (1 avec $p = 0,5$; 2 avec $p = 0,3$; 5 avec $p = 0,2$ et $E(X) = 2,1$), calculer $V(X)$ par la définition.

Exercice 4 – La formule rapide

Retrouver la variance précédente à l'aide de la formule $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Exercice 5 – Le jeu est-il équitable ?

Un jeu coûte 3 € la partie. On lance un dé : si l'on obtient 6, on gagne 15 € ; si l'on obtient 5, on gagne 6 € ; sinon on ne gagne rien.

- Établir la loi du gain algébrique G .
- Calculer $E(G)$ et conclure.

Exercice 6 – Fixer une mise

Dans une tombola, un billet sur 50 rapporte 100 €, cinq billets sur 50 rapportent 10 €, les autres ne rapportent rien. L'organisateur veut que le jeu soit équitable.

À quel prix doit-il vendre le billet ?

Exercice 7 - Espérance d'une transformation

On sait que $E(X) = 4$ et $V(X) = 9$. On pose $Y = 3X - 5$.
Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 8 - Deux placements financiers

Un placement A rapporte 100 € avec une probabilité de 0,5 et 0 € sinon. Un placement B rapporte 500 € avec une probabilité de 0,1 et 0 € sinon.

- Comparer les espérances.
- Comparer les variances. Lequel choisir ?

Exercice 9 - Une espérance imposée

La variable X prend les valeurs 0, 2 et a avec les probabilités 0,4, 0,35 et 0,25.
Déterminer a pour que $E(X) = 3$.

Exercice 10 - Le contrat d'assurance

Un assureur couvre un risque : avec une probabilité de 0,02, il devra verser 3000 € ; sinon il ne verse rien. Il fait payer une prime de 80 € à chaque client.

- Calculer l'espérance du bénéfice de l'assureur par contrat.
- Sur 10 000 contrats, quel bénéfice total peut-il espérer ?

Exercice 11 - Espérance et variance d'un dé

On lance un dé équilibré à six faces et on note X le résultat.
Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$, arrondis au centième.

Exercice 12 - Comparer deux dés

Un dé A porte les faces 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; un dé B porte les faces 3, 3, 3, 4, 4, 5. Les deux dés sont équilibrés.

- Calculer l'espérance de chacun.
- Calculer leurs variances et commenter.

Exercice 13 - Le stand de tir

Un stand propose : 2 € la partie, une cible touchée rapporte 5 €. Un joueur touche la cible avec une probabilité de 0,3.

- Calculer l'espérance du gain algébrique.
- Le joueur joue 50 parties. Quelle perte peut-il prévoir ?

Exercice 14 - Une variance nulle ?

- Que peut-on dire d'une variable aléatoire X dont la variance est nulle ?
- Donner la loi d'une variable prenant les valeurs 0 et 10 dont la variance est la plus

grande possible.

Exercice 15 – Synthèse : la machine à sous

Une machine à sous coûte 1 € la partie. Elle rapporte 20 € avec une probabilité de 0,01, 5 € avec une probabilité de 0,05, 1 € avec une probabilité de 0,2, et rien sinon.

- a) Établir la loi du gain algébrique G .
- b) Calculer $E(G)$ et interpréter.
- c) Calculer $\sigma(G)$, arrondi au centième.