Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : jeux, échantillons et simulations

Variables aléatoires — Première spé maths

Exercices

Méthode

On modélise un problème concret par une variable aléatoire, on calcule ses **paramètres**, on interprète l'**écart type** comme une mesure de risque, et on relie la théorie aux **fréquences observées** en simulation.

Exercice 1 – Deux tirs dépendants

Un archer tire deux flèches. Il touche la cible au premier tir avec la probabilité 0,7. S'il a touché, il touche au second tir avec la probabilité 0,8 ; sinon, avec la probabilité 0,5. Chaque flèche dans la cible rapporte 10 points ; on note X le score.

a) Construire l'arbre pondéré et donner la loi de X.

b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

c) Sachant que l'archer a marqué exactement 10 points, quelle est la probabilité qu'il ait touché au premier tir ?

Exercice 2 – Coût d'un dépistage

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test est positif chez 95 % des malades et chez 3 % des personnes saines. Le test coûte 10 € ; un test positif entraîne un examen complémentaire de 80 €. On note C le coût du dépistage d'une personne.

a) Construire l'arbre pondéré et calculer $P(T)$.

b) Donner la loi de C, puis $E(C)$ et $\sigma(C)$.

c) Une personne a un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

Exercice 3 – Jeu équitable à construire

On tire une carte d'un jeu de 52. Le joueur reçoit 20 € pour un as, 5 € pour une figure et rien sinon. Quelle mise rend le jeu équitable ?

Exercice 4 – Deux investissements

Un placement A rapporte 100 € avec probabilité 0,9 et fait perdre 200 € sinon. Un placement B rapporte 50 € avec probabilité 0,6 et fait perdre 20 € sinon. Lequel choisir ?

Exercice 5 – Loi et simulation

Ce script simule une variable aléatoire. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

```
from random import randint

def X():
    a = randint(1, 4)
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    b = randint(1, 4)
    if a == b:
        return 10
    return -2
```

Exercice 6 – Nombre de succès

On répète trois fois une épreuve de probabilité de succès 0,4. Soit X le nombre de succès. Donner la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7 – Espérance d'une durée

Un technicien intervient en 30 min dans 60 % des cas, 1 h dans 30 % des cas et 2 h sinon. Calculer la durée moyenne et l'écart type, puis la charge moyenne pour 20 interventions.

Exercice 8 – Variable centrée réduite

Soit X d'espérance 20 et d'écart type 4. Déterminer a et b pour que $Y = aX + b$ ait une espérance nulle et un écart type 1.

Exercice 9 – Loi d'un écart

On lance deux dés et D est la valeur absolue de la différence des résultats. Donner la loi de D et $E(D)$.

Exercice 10 – Choix d'une stratégie de jeu

Un jeu propose deux options : recevoir 50 € à coup sûr, ou tirer au sort entre 200 € (probabilité 0,3) et 0 € (probabilité 0,7). Comparer.

Exercice 11 – Espérance d'un minimum

On tire deux jetons sans remise parmi $\{1\,;2\,;3\,;4\}$ et l'on note m le plus petit numéro. Donner la loi de m et $E(m)$.

Exercice 12 – Modélisation d'une remise

Un magasin offre une remise tirée au sort : 30 % (probabilité 0,1), 10 % (probabilité 0,3) ou 0 % sinon. Calculer la remise moyenne, puis le prix moyen payé pour un article à 80 €.

Exercice 13 – Nombre de tirages

Une urne contient 2 boules gagnantes et 3 perdantes. On tire sans remise jusqu'à obtenir une gagnante. Soit N le nombre de tirages. Donner la loi de N et $E(N)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Comparer théorie et simulation

Une simulation de 10 000 lancers de dé donne une moyenne observée de 3,47. Est-ce compatible avec la théorie ?

Exercice 15 – Espérance et décision de stock

La demande quotidienne d'un produit est 0, 1, 2 ou 3 unités avec les probabilités 0,2 ; 0,3 ; 0,3 ; 0,2. Chaque vente rapporte 10 € ; chaque unité non vendue coûte 2 € de stockage. Faut-il stocker 1 ou 2 unités ?

Exercice 16 – Synthèse : contrôle de fabrication

Une usine fabrique des pièces sur deux machines : M_1 produit 60 % des pièces, avec 3 % de défauts ; M_2 produit le reste, avec 5 % de défauts. Une pièce conforme rapporte 12 € ; une pièce défectueuse fait perdre 8 €. On note B le bénéfice réalisé sur une pièce prise au hasard.

a) Construire l'arbre pondéré et calculer la probabilité $P(D)$ qu'une pièce soit défectueuse.

b) Donner la loi de B, puis calculer $E(B)$ et $\sigma(B)$.

c) Une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_2 ?

d) Quel bénéfice moyen attendre sur 1000 pièces ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).