

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : jeux, échantillons et simulations

Variables aléatoires — Première spé maths

Exercices

Méthode

On modélise un problème concret par une variable aléatoire, on calcule ses **paramètres**, on interprète l'**écart type** comme une mesure de risque, et on relie la théorie aux **fréquences observées** en simulation.

Exercice 1 - Somme de deux variables

On lance deux fois un dé équilibré et l'on note S la somme. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$ sans dresser la loi de S .

Exercice 2 - Moyenne d'un échantillon

Une pièce produite a une masse d'espérance 250 g et d'écart type 6 g. On prélève 36 pièces. Calculer l'espérance et l'écart type de la masse moyenne.

Exercice 3 - Jeu équitable à construire

On tire une carte d'un jeu de 52. Le joueur reçoit 20 € pour un as, 5 € pour une figure et rien sinon. Quelle mise rend le jeu équitable ?

Exercice 4 - Deux investissements

Un placement A rapporte 100 € avec probabilité 0,9 et fait perdre 200 € sinon. Un placement B rapporte 50 € avec probabilité 0,6 et fait perdre 20 € sinon. Lequel choisir ?

Exercice 5 - Loi et simulation

Ce script simule une variable aléatoire. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

```
from random import randint
```

```
def X():  
    a = randint(1, 4)  
    b = randint(1, 4)  
    if a == b:  
        return 10  
    return -2
```

Exercice 6 - Nombre de succès

On répète trois fois une épreuve de probabilité de succès 0,4. Soit X le nombre de succès. Donner la loi de X , $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7 - Espérance d'une durée

Un technicien intervient en 30 min dans 60 % des cas, 1 h dans 30 % des cas et 2 h sinon. Calculer la durée moyenne et l'écart type, puis la charge moyenne pour 20 interventions.

Exercice 8 - Variable centrée réduite

Soit X d'espérance 20 et d'écart type 4. Déterminer a et b pour que $Y = aX + b$ ait une espérance nulle et un écart type 1.

Exercice 9 - Loi d'un écart

On lance deux dés et D est la valeur absolue de la différence des résultats. Donner la loi de D et $E(D)$.

Exercice 10 - Choix d'une stratégie de jeu

Un jeu propose deux options : recevoir 50 € à coup sûr, ou tirer au sort entre 200 € (probabilité 0,3) et 0 € (probabilité 0,7). Comparer.

Exercice 11 - Espérance d'un minimum

On tire deux jetons sans remise parmi $\{1; 2; 3; 4\}$ et l'on note m le plus petit numéro. Donner la loi de m et $E(m)$.

Exercice 12 - Modélisation d'une remise

Un magasin offre une remise tirée au sort : 30 % (probabilité 0,1), 10 % (probabilité 0,3) ou 0 % sinon. Calculer la remise moyenne, puis le prix moyen payé pour un article à 80 €.

Exercice 13 - Nombre de tirages

Une urne contient 2 boules gagnantes et 3 perdantes. On tire sans remise jusqu'à obtenir une gagnante. Soit N le nombre de tirages. Donner la loi de N et $E(N)$.

Exercice 14 - Comparer théorie et simulation

Une simulation de 10 000 lancers de dé donne une moyenne observée de 3,47. Est-ce compatible avec la théorie ?

Exercice 15 - Espérance et décision de stock

La demande quotidienne d'un produit est 0, 1, 2 ou 3 unités avec les probabilités 0,2 ; 0,3 ; 0,3 ; 0,2. Chaque vente rapporte 10 € ; chaque unité non vendue coûte 2 € de stockage. Faut-il stocker 1 ou 2 unités ?

Exercice 16 – Synthèse : contrôle de fabrication

Une pièce a une longueur d'espérance 50 mm et d'écart type 0,3 mm. Elle est conforme si sa longueur est dans $[49,4 ; 50,6]$.

- a) Exprimer la tolérance en nombre d'écarts types.
- b) Majorer la proportion de pièces non conformes.
- c) On assemble 4 pièces bout à bout. Calculer l'espérance et l'écart type de la longueur totale.