Plaquette 4 – Lecture graphique, tableaux de signes et équations

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Du graphique de f au signe de f'.

Sur la courbe de f	Signe de f'
portion montante	$f' > 0$
portion descendante	$f' < 0$
tangente horizontale	$f' = 0$
tangente très inclinée	valeur absolue de f' grande

Du graphique de f' aux variations de f. On lit le **signe** de f' (au-dessus ou en dessous de l'axe), pas ses variations — erreur la plus fréquente.

Nombre de solutions de $f(x) = k$. Sur chaque intervalle où f est **dérivable et strictement monotone**, on admet que l'équation a :

— **une** solution si k est compris entre les valeurs aux bornes ;

— **aucune** solution sinon.

On compte ensuite les solutions **intervalle par intervalle**.

Encadrement d'une racine par balayage. On calcule f en des points de plus en plus rapprochés jusqu'à détecter le **changement de signe**.

Dichotomie. On coupe l'intervalle en deux et l'on garde la moitié où le signe change ; après k étapes, l'amplitude vaut

$$\frac{b-a}{2^k}$$

Signe d'un produit ou d'un quotient. On dresse un **tableau de signes** ligne par ligne, en marquant les **valeurs interdites** d'une double barre pour un quotient.

Vocabulaire à ne pas confondre.

— **Extremum local** : meilleur *au voisinage* du point.

— **Extremum global** : meilleur *sur tout l'intervalle* d'étude.

— Un extremum global est toujours local ; la réciproque est fausse.

Correction de l'exercice 1 – Du signe de f' aux variations

— **Racines de f'** : $x = -2$ et $x = 3$.

— **Signe** : f' est un trinôme de coefficient dominant **positif**, donc positif à l'**extérieur** de $[-2\,;3]$ et négatif à l'intérieur.

— **Tableau de signes** :

! x	-4	-2	3	5
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Variations** : f **croît** sur $[-4\,;-2]$, **décroît** sur $[-2\,;3]$, **croît** sur $[3\,;5]$.
— **Extremums** : maximum local en $x=-2$, minimum local en $x=3$ ✓
— **Contrôles du signe** : $f'(-3)=(-1)(-6)=6>0$ ✓ ; $f'(0)=-6<0$ ✓ ; $f'(4)=6\times 1=6>0$ ✓
— **Remarque** : on ne connaît **aucune valeur** de f, seulement ses variations — c'est suffisant pour le tableau, pas pour compter les solutions d'une équation.
— **Une primitive possible** : $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x$, mais elle n'est pas unique (à une constante près).

Réponse. Croissante sur $[-4\,;-2]$, décroissante sur $[-2\,;3]$, croissante sur $[3\,;5]$.

Correction de l'exercice 2 – Nombre de solutions

On dérive et on factorise : $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$. Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre elles : f est croissante sur $]-\infty\,;1]$, décroissante sur $[1\,;3]$, puis croissante sur $[3\,;+\infty[$, avec

$$f(1)=1-6+9=4 \qquad f(3)=27-54+27=0$$

Pour résoudre $f(x)=2$, on remarque que $f(2)=8-24+18=2$: 2 est une solution. On peut donc factoriser par $x-2$:

$$x^3-6x^2+9x-2=(x-2)\left(x^2-4x+1\right)$$

ce que l'on vérifie en développant. Le trinôme x^2-4x+1 a pour discriminant 12 et pour racines $2\pm\sqrt{3}$. L'équation a donc **trois** solutions, une sur chacun des intervalles de monotonie : $2-\sqrt{3}\approx 0{,}27$, 2 et $2+\sqrt{3}\approx 3{,}73$.

Réponse. Trois solutions : $2-\sqrt{3}\approx 0{,}268$, 2 et $2+\sqrt{3}\approx 3{,}732$.

Correction de l'exercice 3 – Encadrement par balayage

On étudie $f(x)=x^3+x-5$. Sa dérivée vaut $f'(x)=3x^2+1\geq 1>0$: f est **strictement croissante**, donc elle prend chaque valeur au plus une fois, et l'équation a au plus une solution.

Comme $f(1)=-3<0$ et $f(2)=5>0$, la courbe, tracée sans lever le crayon, passe d'en dessous à au-dessus de l'axe des abscisses : on admet qu'elle le coupe entre 1 et 2. L'équation a donc **une unique** solution α.

On l'encadre par balayage. Au dixième, $f(1{,}5)=-0{,}125<0$ et $f(1{,}6)=0{,}696>0$. Au centième :

$$f(1{,}51)\approx -0{,}047<0 \qquad f(1{,}52)\approx 0{,}032>0$$

donc $1{,}51<\alpha<1{,}52$, et plus précisément $\alpha\approx 1{,}516$. Une dichotomie partant de $[1\,;2]$ atteindrait la même précision en 7 étapes.

Réponse. Unique solution α avec $1{,}51<\alpha<1{,}52$ ($\alpha\approx 1{,}516$).

Correction de l'exercice 4 – Tableau de signes d'un quotient

— **Valeur interdite** : $x=2$.
— **Racines** : $x=1$, $x=-3$ (numérateur) et $x=2$ (dénominateur).
— **Tableau de signes** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

! x	-3	1	2
$x-1$	$-$	0	$+$
$x+3$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0
quotient	$-$	0	barre

— **Analyse intervalle par intervalle** :
— sur $]-\infty\,;-3[$: $(-)(-)\,/\,(-) = -$;
— sur $]-3\,;1[$: $(-)(+)\,/\,(-) = +$;
— sur $]1\,;2[$: $(+)(+)\,/\,(-) = -$;
— sur $]2\,;+\infty[$: $(+)(+)\,/\,(+) = +$.
— **Solution** :

$$S = [-3\,;1] \cup]2\,;+\infty[$$

— **Contrôles** : $x = 0$ donne $\dfrac{(-1)(3)}{-2} = 1{,}5 \geq 0$ ✓ ; $x = 1{,}5$ donne $\dfrac{(0{,}5)(4{,}5)}{-0{,}5} = -4{,}5 < 0$ ✓ ; $x = 3$ donne $\dfrac{2\times 6}{1} = 12 \geq 0$ ✓ ; $x = -4$ donne $\dfrac{(-5)(-1)}{-6} \approx -0{,}833 < 0$ ✓
— **Bornes** : -3 et 1 sont **inclus** (le quotient y vaut 0), mais 2 est **exclu** (valeur interdite) ✓

Réponse. $S = [-3\,;1] \cup]2\,;+\infty[$.

Correction de l’exercice 5 – Lecture d’un graphique de dérivée

— **Forme de f'** : une parabole de sommet « vers le bas » a un coefficient dominant **positif**, donc $f'(x) = a(x+1)(x-4)$ avec $a > 0$.
— **Signe** : f' est **positive** à l’extérieur de $[-1\,;4]$ et **négative** à l’intérieur.
— **Variations de f** : croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;4]$, croissante sur $[4\,;+\infty[$.
— **Extremums** : **maximum local** en $x = -1$ (passage de + à −) et **minimum local** en $x = 4$ ✓
— **Erreur classique à éviter** : le **minimum** de f' (au sommet de la parabole, en $x = 1{,}5$) n’est **pas** un extremum de f — c’est le point où f décroît le **plus vite**.
— **Contrôle** : avec $a = 1$, $f'(1{,}5) = 2{,}5 \times (-2{,}5) = -6{,}25$, la valeur la plus négative — donc la pente la plus forte en descente ✓
— **Amplitude de la décroissance** : f perd de la hauteur sur un intervalle de longueur 5, avec une pente allant jusqu’à $-6{,}25$ — la « chute » est marquée.
— **À retenir** : on lit le **signe** de f', jamais ses variations, pour obtenir celles de f.

Réponse. f croît, décroît sur $[-1\,;4]$, croît ; max local en -1, min local en 4.

Correction de l’exercice 6 – Dichotomie

À chaque étape, on calcule f au milieu de l’intervalle et l’on garde la moitié où f change de signe. Au départ, $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$.

— Étape 1 : $f(1{,}5) = 3{,}375 - 3 - 1 = -0{,}625 < 0$, donc on garde $[1{,}5\,;2]$.
— Étape 2 : $f(1{,}75) \approx 5{,}359 - 3{,}5 - 1 = 0{,}859 > 0$, donc on garde $[1{,}5\,;1{,}75]$.
— Étape 3 : $f(1{,}625) \approx 4{,}291 - 3{,}25 - 1 = 0{,}041 > 0$, donc on garde $[1{,}5\,;1{,}625]$.

Après trois étapes, l’amplitude est divisée par $2^3 = 8$:

$$1{,}5 < \alpha < 1{,}625$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La racine est en fait le nombre d'or : en développant, on vérifie que $x^3 - 2x - 1 = (x+1)\left(x^2 - x - 1\right)$, et la racine positive de $x^2 - x - 1$ est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$, bien dans l'encadrement.

Réponse. $1{,}5 < \alpha < 1{,}625$ (la racine est le nombre d'or $\approx 1{,}618$).

Correction de l'exercice 7 – Comparaison de deux fonctions

Pour comparer deux fonctions, on étudie le signe de leur différence : $d(x) = x^3 - (3x-2) = x^3 - 3x + 2$. Comme $d(1) = 0$, on factorise par $x - 1$:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)\left(x^2 + x - 2\right) = (x-1)^2(x+2)$$

ce que l'on vérifie en développant. Le facteur $(x-1)^2$ est positif ou nul, donc $d(x)$ a le signe de $x + 2$.

— Pour $x < -2$: $d(x) < 0$, la **droite** est au-dessus de la courbe.
— Pour $x > -2$: $d(x) \geq 0$, la **courbe** est au-dessus, avec un contact en $x = 1$.

Les deux points communs sont $(-2\,;-8)$ et $(1\,;1)$. En $x = 1$, la racine est double : la droite y est tangente à la courbe, puisque $f'(1) = 3$ est la pente de la droite. **Contrôle** : $d(0) = 2 > 0$ et $d(-3) = -16 < 0$.

Réponse. $x^3 - (3x-2) = (x-1)^2(x+2)$: droite au-dessus pour $x < -2$, courbe au-dessus ensuite (tangente en $x = 1$).

Correction de l'exercice 8 – Fonction avec valeur interdite

On dérive sur $]0\,;+\infty[$ et l'on factorise :

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Pour $x > 0$, les facteurs x^2 et $x + 2$ sont positifs, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 2$: négatif sur $]0\,;2[$, positif sur $]2\,;+\infty[$. La fonction décroît sur $]0\,;2]$ puis croît sur $[2\,;+\infty[$: elle atteint son minimum en 2, $f(2) = 2 + 2 = 4$.

On en déduit l'inégalité $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement en $x = 2$. On remarque aussi que $f\left(\dfrac{4}{x}\right) = f(x)$, d'où par exemple $f(1) = f(4) = 5$.

Contrôle : $f(0{,}5) = 8{,}5$ et $f(10) = 10{,}4$, supérieurs à 4. Le minimum vaut 4, atteint en $x = 2$.

Réponse. Minimum 4 en $x = 2$; $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$ sur $]0\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 9 – Paramètre et nombre de solutions

— **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
— **Variations** : croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;1]$, croissante sur $[1\,;+\infty[$.
— **Extremums** : $f(-1) = 2$ (maximum local) et $f(1) = -2$ (minimum local).
— **Discussion** :
— $k > 2$: une seule solution (sur la branche finale) ;
— $k = 2$: **deux** solutions ($x = -1$, racine double, et une autre) ;
— $-2 < k < 2$: **trois** solutions, une par intervalle de monotonie ;
— $k = -2$: **deux** solutions ;
— $k < -2$: une seule solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôles pour** $k = 0$: $x^3 - 3x = x\left(x^2 - 3\right) = 0$ donne $x \in \left\langle -\sqrt{3}\,;0\,;\sqrt{3}\right\rangle$ — **trois** solutions ✓
— **Contrôle pour** $k = 2$: $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$, donc $x = -1$ (double) et $x = 2$ — **deux** valeurs distinctes ✓
— **Contrôle pour** $k = 3$: $x^3 - 3x - 3 = 0$ n'a qu'une racine réelle, environ 2,1036 ✓
— **Lecture graphique** : on fait glisser la droite horizontale $y = k$ et l'on compte les intersections ✓
— **Résumé** : trois solutions exactement quand k est **strictement compris** entre les deux extremums locaux.

Réponse. Une solution si $|k| > 2$, deux si $|k| = 2$, trois si $|k| < 2$.

Correction de l'exercice 10 – Signe d'une expression factorisée

— **Factorisation** : $x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x-2)(x+2)$.
— **Racines** : -2, 0 et 2.
— **Tableau de signes** :

! x	-2	0	2
x	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0
$x+2$	0	$+$	$+$
produit	$-$	0	0

— **Analyse** :
— sur $]-\infty\,;-2[$: $(-)(-)(-) = -$;
— sur $]-2\,;0[$: $(-)(-)(+) = +$;
— sur $]0\,;2[$: $(+)(-)(+) = -$;
— sur $]2\,;+\infty[$: $(+)(+)(+) = +$.
— **Solution** :

$$S =]-\infty\,;-2] \cup [0\,;2]$$

— **Contrôles** : $x = -3$ donne $-27 + 12 = -15 \leq 0$ ✓ ; $x = -1$ donne $-1 + 4 = 3 > 0$ ✓ ; $x = 1$ donne $1 - 4 = -3 \leq 0$ ✓ ; $x = 3$ donne $27 - 12 = 15 > 0$ ✓
— **Bornes incluses** : les trois racines annulent l'expression, donc vérifient l'inégalité **large** ✓
— **Remarque** : la fonction $x \mapsto x^3 - 4x$ est **impaire**, d'où la symétrie du tableau par rapport à l'origine ✓

Réponse. $S =]-\infty\,;-2] \cup [0\,;2]$.

Correction de l'exercice 11 – Extremum et tangente

Un extremum local en 2 impose $f'(2) = 0$, et sa valeur impose $f(2) = -3$: deux conditions pour deux inconnues. Avec $f'(x) = 3x^2 + 2ax$:

$$f'(2) = 12 + 4a = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

puis $f(2) = 8 + 4a + b = -4 + b = -3$, donc $b = 1$ et $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Il faut vérifier qu'il y a bien un extremum : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ est négative entre 0 et 2 et positive après 2. La dérivée change de signe en 2, du $-$ au $+$: c'est un **minimum** local, de valeur $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$. En 0, il y a un maximum local, $f(0) = 1$, et la tangente en $x = 2$ est horizontale, d'équation $y = -3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $f(1) = -1$ et $f(3) = 1$, supérieurs à -3. Réponse : $a = -3$ et $b = 1$.

Réponse. $a = -3$ et $b = 1$; $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, minimum local en $x = 2$.

Correction de l'exercice 12 – Variations d'une somme

On raisonne sur les dérivées, en supposant f et g dérivables, avec $f' \geq 0$ et $g' \geq 0$ sur I.

— **Somme** : $(f+g)' = f' + g' \geq 0$, donc $f+g$ est **croissante**.
— **Différence** : $(f-g)' = f' - g'$ peut avoir n'importe quel signe. Avec $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$, on obtient $f - g = x$, croissante ; avec $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$, on obtient $-x$, décroissante. On ne peut rien conclure en général.
— **Produit** : $(fg)' = f'g + fg'$, de signe indéterminé lui aussi. Avec $f(x) = g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$, le produit x^2 décroît sur $]-\infty\,;0]$.

Si en plus f et g sont **positives**, les deux termes $f'g$ et fg' sont positifs, et le produit est croissant :

$$(fg)' = f'g + fg' \geq 0$$

Conclusion : $f+g$ est croissante ; on ne peut rien dire de $f-g$, ni de fg sans hypothèse de positivité.

Réponse. $f+g$ croissante ; rien pour $f-g$ ni fg en général (fg croissante si $f, g \geq 0$).

Correction de l'exercice 13 – Résolution graphique

— **Dérivée** : $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x\left(x^2-2\right) = 4x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.
— **Racines** : $-\sqrt{2} \approx -1{,}4142$, 0 et $\sqrt{2}$.
— **Signe** : négative sur $]-\infty\,;-\sqrt{2}\,[$, positive sur $]-\sqrt{2}\,;0[$, négative sur $]0\,;\sqrt{2}\,[$, positive sur $]\sqrt{2}\,;+\infty[$.
— **Valeurs** : $f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 4 - 8 = -4$ et $f(0) = 0$.
— **Variations** : décroît jusqu'à -4, remonte à 0, redescend à -4, remonte vers $+\infty$.
— **Extremums** : deux **minimums** globaux -4 en $\pm\sqrt{2}$; un **maximum local** 0 en $x = 0$.
— **Équation** $f(x) = -3$ — quatre intervalles de monotonie, et -3 est compris entre -4 et 0 dans chacun des quatre :
— **Conclusion** : **quatre** solutions ✓
— **Résolution exacte** : $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ donne, avec $X = x^2$, $X^2 - 4X + 3 = 0$ et $X \in \{1\,;3\}$.
— **Solutions** : $x = \pm 1$ et $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}7321$ ✓
— **Contrôles** : $f(1) = 1 - 4 = -3$ ✓ et $f\left(\sqrt{3}\right) = 9 - 12 = -3$ ✓
— **Parité** : f est **paire**, d'où la symétrie parfaite du tableau et des solutions ✓

Réponse. Quatre solutions : ± 1 et $\pm\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 14 – Encadrement d'un extremum

— **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, donc f croît sur $]-\infty\,;0]$, décroît sur $[0\,;2]$, croît sur $[2\,;+\infty[$.
— **Valeurs** : $f(0) = 1$ et $f(2) = -3$.
— **Trois racines** : une dans $]-\infty\,;0[$, une dans $]0\,;2[$, une dans $]2\,;+\infty[$.
— **Plus grande racine** : sur $[2\,;+\infty[$, f croît de -3 à $+\infty$.
— **Balayage** : $f(2{,}8) = 21{,}952 - 23{,}52 + 1 = -0{,}568 < 0$ et $f(2{,}9) = 24{,}389 - 25{,}23 + 1 = 0{,}159 > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$2{,}8 < \alpha < 2{,}9$$

— **Affinement** : $f(2{,}87) \approx 23{,}6394 - 24{,}7101 + 1 = -0{,}0708 < 0$ et $f(2{,}88) \approx 23{,}8879 - 24{,}8832 + 1 = 0{,}0047 > 0$.
— **Valeur** : $\alpha \approx 2{,}8794$.
— **Contrôles des autres racines** : $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc une racine dans $]-1\,;0[$, environ $-0{,}5321$ ✓
— $f(0{,}6) = 0{,}216 - 1{,}08 + 1 = 0{,}136 > 0$ et $f(0{,}7) = 0{,}343 - 1{,}47 + 1 = -0{,}127 < 0$, donc une racine dans $]0{,}6\,;0{,}7[$, environ $0{,}6527$ ✓
— **Contrôle de la somme des racines** : $-0{,}5321 + 0{,}6527 + 2{,}8794 = 3{,}0000$, et la somme des racines d'un polynôme unitaire de degré 3 vaut $-\frac{b}{a} = 3$ ✓
— **Contrôle du produit** : $-0{,}5321 \times 0{,}6527 \times 2{,}8794 \approx -1{,}0001$, et le produit vaut $-\frac{d}{a} = -1$ ✓

Réponse. $2{,}8 < \alpha < 2{,}9$ (plus précisément $\alpha \approx 2{,}879$).

Correction de l'exercice 15 – Étude d'une fonction rationnelle

On dérive le quotient avec $u = x^2 + 1$ et $v = x - 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - \left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

Le dénominateur est positif. Le numérateur a pour discriminant 8 et pour racines $1 \pm \sqrt{2}$; seule $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414$ est dans $]1\,;+\infty[$. Le trinôme est négatif entre ses racines et positif au-delà : f décroît sur $\left]1\,;1+\sqrt{2}\right]$, puis croît. Elle atteint son minimum en $x = 1 + \sqrt{2}$, où $x - 1 = \sqrt{2}$ et $x^2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$:

$$f\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2 \approx 4{,}83$$

Contrôle : $f(2) = 5$ et $f(3) = 5$, supérieurs ; $f(2{,}4) \approx 4{,}829$, très proche. Le minimum vaut $2 + 2\sqrt{2}$.

Réponse. Minimum $2 + 2\sqrt{2} \approx 4{,}83$ en $x = 1 + \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : étude et équation

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$, positive à l'extérieur des racines et négative entre elles. La fonction croît jusqu'à -1, décroît de -1 à 2, puis croît, avec

$$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12 \qquad f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$$

b) On calcule quelques valeurs : $f(-3) = -40 < 0$, $f(-1) = 12 > 0$, $f(2) = -15 < 0$ et $f(4) = 37 > 0$. Sur chacun des intervalles $[-3\,;-1]$, $[-1\,;2]$ et $[2\,;4]$, f est strictement monotone et change de signe : on admet qu'elle s'annule exactement une fois sur chacun. Sur $]-\infty\,;-3]$, f est croissante, donc $f(x) \leq f(-3) < 0$; sur $[4\,;+\infty[$, elle est croissante, donc $f(x) \geq f(4) > 0$. L'équation a donc **trois** solutions.

c) $f(-2) = 1 > 0$ et $f(-2{,}1) \approx -1{,}55 < 0$, donc $-2{,}1 < \alpha < -2$; plus précisément, $\alpha \approx -2{,}04$.

Les deux autres solutions sont environ 0,39 et 3,15 : $f(0) = 5$, $f(1) = -8$, $f(3) = -4$, $f(4) = 37$. Réponses : maximum 12 en -1, minimum -15 en 2 ; trois solutions ; $-2{,}1 < \alpha < -2$.

Réponse. a) max 12 en -1, min -15 en 2 · b) trois solutions · c) $-2{,}1 < \alpha < -2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).