

Plaquette 4 – Lecture graphique, tableaux de signes et équations

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Du graphique de f au signe de f .

Sur la courbe de f	Signe de f
portion montante	$f' > 0$
portion descendante	$f' < 0$
tangente horizontale	$f' = 0$
tangente très inclinée	valeur absolue de f' grande

Du graphique de f' aux variations de f . On lit le **signe** de f' (au-dessus ou en dessous de l'axe), pas ses variations — erreur la plus fréquente.

Nombre de solutions de $f(x) = k$. Sur chaque intervalle où f est **continue et strictement monotone**, l'équation a :

- **une** solution si k est compris entre les valeurs aux bornes ;
- **aucune** solution sinon.

On compte ensuite les solutions **intervalle par intervalle**.

Encadrement d'une racine par balayage. On calcule f en des points de plus en plus rapprochés jusqu'à détecter le **changement de signe**.

Dichotomie. On coupe l'intervalle en deux et l'on garde la moitié où le signe change ; après k étapes, l'amplitude vaut $\frac{b-a}{2^k}$.

Signe d'un produit ou d'un quotient. On dresse un **tableau de signes** ligne par ligne, en marquant les **valeurs interdites** d'une double barre pour un quotient.

Vocabulaire à ne pas confondre.

- **Extremum local** : meilleur *au voisinage* du point.
- **Extremum global** : meilleur *sur tout l'intervalle* d'étude.
- Un extremum global est toujours local ; la réciproque est fausse.

Correction de l'exercice 1 – Du signe de f' aux variations

- **Racines de f'** : $x = -2$ et $x = 3$.
- **Signe** : f' est un trinôme de coefficient dominant **positif**, donc positif à l'**extérieur** de $[-2 ; 3]$ et négatif à l'intérieur.
- **Tableau de signes** :

x	-4	-2	3	5
$x + 2$	–	0	+	+
$x - 3$	–	–	0	+
$f'(x)$	+	0	–	+

- **Variations** : f **croît** sur $[-4 ; -2]$, **décroît** sur $[-2 ; 3]$, **croît** sur $[3 ; 5]$.

- **Extremums** : maximum local en $x = -2$, minimum local en $x = 3$ ✓
- **Contrôles du signe** : $f(-3) = (-1)(-6) = 6 > 0$ ✓ ; $f(0) = -6 < 0$ ✓ ;
 $f(4) = 6 \times 1 = 6 > 0$ ✓
- **Remarque** : on ne connaît **aucune valeur** de f , seulement ses variations — c'est suffisant pour le tableau, pas pour compter les solutions d'une équation.
- **Une primitive possible** : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$, mais elle n'est pas unique (à une constante près).

Réponse. Croissante sur $[-4; -2]$, décroissante sur $[-2; 3]$, croissante sur $[3; 5]$.

Correction de l'exercice 2 - Nombre de solutions

- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- **Racines** : $x = 1$ et $x = 3$.
- **Variations** : croissante sur $] -\infty; 1]$, décroissante sur $[1; 3]$, croissante sur $[3; +\infty[$.
- **Valeurs** : $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.
- **Limites** : $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.
- **Équation** $f(x) = 2$ — intervalle par intervalle :
 - sur $] -\infty; 1]$: f croît de $-\infty$ à 4, donc **une** solution ;
 - sur $[1; 3]$: f décroît de 4 à 0, donc **une** solution ;
 - sur $[3; +\infty[$: f croît de 0 à $+\infty$, donc **une** solution.
- **Conclusion** : **trois** solutions ✓
- **Contrôles** : $f(0) = 0 < 2$ et $f(1) = 4 > 2$ — la première solution est dans $]0; 1[$ ✓
- $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$ — **exactement** 2 ! La deuxième solution est $x = 2$ ✓
- $f(4) = 64 - 96 + 36 = 4 > 2$ et $f(3) = 0 < 2$ — la troisième est dans $]3; 4[$ ✓
- **Factorisation** : $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = (x - 2)(x^2 - 4x + 1)$, dont les autres racines sont $2 \pm \sqrt{3}$, soit 0,2679 et 3,7321 ✓

Réponse. Trois solutions : $2 - \sqrt{3} \approx 0,268$, 2 et $2 + \sqrt{3} \approx 3,732$.

Correction de l'exercice 3 - Encadrement par balayage

- **Fonction** : $f(x) = x^3 + x - 5$, dérivable sur $\mathbb{R}$.
- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ — la fonction est **strictement croissante** ✓
- **Unicité** : une fonction continue strictement croissante prend chaque valeur **au plus une fois** ✓
- **Existence** : $f(1) = -3 < 0$ et $f(2) = 5 > 0$, donc la racine est dans $]1; 2[$ ✓
- **Balayage au dixième** : $f(1,5) = 3,375 - 3,5 = -0,125 < 0$ et
 $f(1,6) = 4,096 - 3,4 = 0,696 > 0$.
- **Encadrement** : $1,5 < \alpha < 1,6$.
- **Balayage au centième** : $f(1,51) \approx 3,4425 - 3,49 = -0,0475 < 0$ et
 $f(1,52) \approx 3,5120 - 3,48 = 0,0320 > 0$.
$$1,51 < \alpha < 1,52$$
- **Valeur** : $\alpha \approx 1,5160$.
- **Contrôle** : $f(1,516) = 3,4841 - 3,484 \approx 0,0001 \approx 0$ ✓
- **Contrôle de la monotonie** : $f'(1,5) = 7,75 > 0$ ✓ — la croissance est nette au voisinage de la racine.
- **Efficacité** : le balayage au centième demande jusqu'à 10 évaluations par décimale ; une **dichotomie** atteindrait 10^{-2} en 7 étapes seulement à partir de $[1; 2]$.

Réponse. Unique solution α avec $1,51 < \alpha < 1,52$ ($\alpha \approx 1,516$).

Correction de l'exercice 4 - Tableau de signes d'un quotient

- **Valeur interdite** : $x = 2$.
- **Racines** : $x = 1$, $x = -3$ (numérateur) et $x = 2$ (dénominateur).
- **Tableau de signes** :

x	-3	1	2
$x - 1$	$-$	0	$+$
$x + 3$	0	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0
quotient	$-$	0	barre

- **Analyse intervalle par intervalle** :

- sur $] -\infty ; -3[$: $(-)(-)/(-) = -$;
- sur $] -3 ; 1[$: $(-)(+)/(-) = +$;
- sur $] 1 ; 2[$: $(+)(+)/(-) = -$;
- sur $] 2 ; +\infty[$: $(+)(+)/(+) = +$.

- **Solution** :

$$S = [-3 ; 1] \cup]2 ; +\infty[$$

- **Contrôles** : $x = 0$ donne $\frac{(-1)(3)}{-2} = 1,5 \geq 0 \checkmark$; $x = 1,5$ donne $\frac{(0,5)(4,5)}{-0,5} = -4,5 < 0 \checkmark$;
 $x = 3$ donne $\frac{2 \times 6}{1} = 12 \geq 0 \checkmark$; $x = -4$ donne $\frac{(-5)(-1)}{-6} \approx -0,833 < 0 \checkmark$
- **Bornes** : -3 et 1 sont **inclus** (le quotient y vaut 0), mais 2 est **exclu** (valeur interdite) $\checkmark$

Réponse. $S = [-3 ; 1] \cup]2 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 5 - Lecture d'un graphique de dérivée

- **Forme de f** : une parabole de sommet « vers le bas » a un coefficient dominant **positif**, donc $f(x) = a(x + 1)(x - 4)$ avec $a > 0$.
- **Signe** : f est **positive** à l'extérieur de $[-1 ; 4]$ et **négative** à l'intérieur.
- **Variations de f** : croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 4]$, croissante sur $[4 ; +\infty[$.
- **Extremums** : **maximum local** en $x = -1$ (passage de $+$ à $-$) et **minimum local** en $x = 4 \checkmark$
- **Erreur classique à éviter** : le **minimum** de f (au sommet de la parabole, en $x = 1,5$) n'est **pas** un extremum de f — c'est le point où f décroît le **plus vite**.
- **Interprétation de $x = 1,5$** : c'est un **point d'inflexion** de la courbe de $f \checkmark$
- **Contrôle** : avec $a = 1$, $f(1,5) = 2,5 \times (-2,5) = -6,25$, la valeur la plus négative — donc la pente la plus forte en descente $\checkmark$
- **Amplitude de la décroissance** : f perd de la hauteur sur un intervalle de longueur 5, avec une pente allant jusqu'à $-6,25$ — la « chute » est marquée.
- **À retenir** : on lit le **signe** de f , jamais ses variations, pour obtenir celles de f .

Réponse. f croît, décroît sur $[-1 ; 4]$, croît ; max local en -1 , min local en 4 .

Correction de l'exercice 6 - Dichotomie

- **Valeurs initiales** : $f(1) = 1 - 2 - 1 = -2 < 0$ et $f(2) = 8 - 4 - 1 = 3 > 0$ ✓
- **Étape 1** : milieu 1,5, avec $f(1,5) = 3,375 - 3 - 1 = -0,625 < 0$.
- Le changement de signe est entre 1,5 et 2 : on garde $[1,5; 2]$.
- **Étape 2** : milieu 1,75, avec $f(1,75) = 5,359375 - 3,5 - 1 = 0,859375 > 0$.
- On garde $[1,5; 1,75]$.
- **Étape 3** : milieu 1,625, avec $f(1,625) \approx 4,2915 - 3,25 - 1 = 0,0415 > 0$.
- On garde $[1,5; 1,625]$.
- **Encadrement obtenu** :

$$1,5 < \alpha < 1,625$$

- **Amplitude** : $\frac{2-1}{2^3} = 0,125$ ✓
- **Valeur exacte** : $\alpha \approx 1,6180$ — c'est le **nombre d'or** ! En effet
 $x^3 - 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x - 1)$ ✓
- **Contrôle de la factorisation** :
 $(x+1)(x^2 - x - 1) = x^3 - x^2 - x + x^2 - x - 1 = x^3 - 2x - 1$ ✓
- **Racines** : -1 et $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, soit 1,6180 et $-0,6180$ ✓
- **Étapes nécessaires pour** 10^{-3} : $\frac{1}{2^k} < 10^{-3}$ donne $k \geq 10$ ✓

Réponse. $1,5 < \alpha < 1,625$ (la racine est le nombre d'or $\approx 1,618$).

Correction de l'exercice 7 - Comparaison de deux fonctions

- **Différence** : $d(x) = x^3 - 3x + 2$.
- **Racine évidente** : $d(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ ✓
- **Factorisation** :
 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$.
- **Contrôle par développement** :
 $(x^2 - 2x + 1)(x+2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2$ ✓
- **Signe** : $(x-1)^2 \geq 0$, donc d a le signe de $x+2$.
- **Conclusion** :
 — sur $] -\infty; -2[$: $d < 0$, la **droite** est au-dessus ;
 — en $x = -2$: contact, $f(-2) = g(-2) = -8$;
 — sur $] -2; +\infty[$: $d \geq 0$, la **courbe** est au-dessus, avec contact en $x = 1$.
- **Points d'intersection** : $(-2; -8)$ et $(1; 1)$ ✓
- **Contrôles** : $g(1) = 1$ ✓ et $g(-2) = -8$ ✓
- **Nature du contact en** $x = 1$: la racine est **double**, donc la droite est **tangente** à la courbe en ce point.
- **Vérification** : $f'(1) = 3 =$ pente de g ✓
- **Contrôle numérique** : $d(0) = 2 > 0$ ✓ et $d(-3) = -27 + 9 + 2 = -16 < 0$ ✓

Réponse. $x^3 - (3x - 2) = (x-1)^2(x+2)$: droite au-dessus pour $x < -2$, courbe au-dessus ensuite (tangente en $x = 1$).

Correction de l'exercice 8 - Fonction avec valeur interdite

- **Dérivée** :

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

- **Signe sur $]0; +\infty[$** : $x^2 > 0$ et $x+2 > 0$, donc f a le signe de $x-2$ — négative avant 2, positive après.
- **Variations** : décroissante sur $]0; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$.
- **Minimum** :

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

- **Contrôles** : $f(1) = 5$; $f(4) = 5$; $f(0,5) = 8,5$; $f(10) = 10,4$ — tous supérieurs à 4 ✓
- **Symétrie** : $f\left(\frac{4}{x}\right) = f(x)$ — d'où l'égalité $f(1) = f(4)$ ✓
- **Limites** : $f(x) \rightarrow +\infty$ en 0^+ **et** en $+\infty$ — la courbe forme une « cuvette » ✓
- **Inégalité obtenue** : $x + \frac{4}{x} \geq 4$ pour tout $x > 0$, avec égalité en $x = 2$ ✓
- **Généralisation** : $x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$ pour $x > 0$ et $a > 0$, avec égalité en $x = \sqrt{a}$ — c'est l'inégalité arithmético-géométrique ✓
- **Sur $] -\infty; 0[$** : par imparité, f a un **maximum** -4 en $x = -2$.

Réponse. Minimum 4 en $x = 2$; $x + \frac{4}{x} \geq 4$ sur $]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 - Paramètre et nombre de solutions

- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
- **Variations** : croissante sur $] -\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$.
- **Extremums** : $f(-1) = 2$ (maximum local) et $f(1) = -2$ (minimum local).
- **Discussion** :
- $k > 2$: une seule solution (sur la branche finale) ;
- $k = 2$: **deux** solutions ($x = -1$, racine double, et une autre) ;
- $-2 < k < 2$: **trois** solutions, une par intervalle de monotonie ;
- $k = -2$: **deux** solutions ;
- $k < -2$: une seule solution.
- **Contrôles pour $k = 0$** : $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0$ donne $x \in \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$ — **trois** solutions ✓
- **Contrôle pour $k = 2$** : $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$, donc $x = -1$ (double) et $x = 2$ — **deux** valeurs distinctes ✓
- **Contrôle pour $k = 3$** : $x^3 - 3x - 3 = 0$ n'a qu'une racine réelle, environ 2,1036 ✓
- **Lecture graphique** : on fait glisser la droite horizontale $y = k$ et l'on compte les intersections ✓
- **Résumé** : trois solutions exactement quand k est **strictement compris** entre les deux extremums locaux.

Réponse. Une solution si $|k| > 2$, deux si $|k| = 2$, trois si $|k| < 2$.

Correction de l'exercice 10 - Signe d'une expression factorisée

- **Factorisation** : $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$.
- **Racines** : -2 , 0 et 2 .
- **Tableau de signes** :

x	-2	0	2
$x - 2$	$-$	$-$	0
$x + 2$	0	$+$	$+$
produit	$-$	0	0

- **Analyse :**
- sur $] -\infty ; -2[: (-)(-)(-) = - ;$
- sur $] -2 ; 0[: (-)(-)(+) = + ;$
- sur $] 0 ; 2[: (+)(-)(+) = - ;$
- sur $] 2 ; +\infty[: (+)(+)(+) = + .$
- **Solution :**

$$S =]-\infty ; -2] \cup [0 ; 2]$$

- **Contrôles :** $x = -3$ donne $-27 + 12 = -15 \leq 0 \checkmark$; $x = -1$ donne $-1 + 4 = 3 > 0 \checkmark$;
 $x = 1$ donne $1 - 4 = -3 \leq 0 \checkmark$; $x = 3$ donne $27 - 12 = 15 > 0 \checkmark$
- **Bornes incluses :** les trois racines annulent l'expression, donc vérifient l'inégalité large $\checkmark$
- **Remarque :** la fonction $x \mapsto x^3 - 4x$ est **impaire**, d'où la symétrie du tableau par rapport à l'origine $\checkmark$

Réponse. $S =]-\infty ; -2] \cup [0 ; 2]$.

Correction de l'exercice 11 - Extremum et tangente

- **Dérivée :** $f(x) = 3x^2 + 2ax$.
- **Condition d'extremum :** $f'(2) = 0$ donne $12 + 4a = 0$, donc
 $a = -3$
- **Condition de valeur :** $f(2) = 8 + 4a + b = 8 - 12 + b = -3$, donc
 $b = 1$
- **Fonction :** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
- **Vérifications :** $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, qui s'annule bien en 2 $\checkmark$ et
 $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3 \checkmark$
- **Nature de l'extremum :** f passe de $-$ à $+$ en $x = 2$, c'est donc un **minimum** local $\checkmark$
- **Autre extremum :** en $x = 0$, avec $f(0) = 1$ — un **maximum** local $\checkmark$
- **Contrôles :** $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$, entre -3 et $1 \checkmark$; $f(3) = 27 - 27 + 1 = 1 > -3 \checkmark$
- **Point d'inflexion :** $f''(x) = 6x - 6$ s'annule en $x = 1$, milieu des deux extremums $\checkmark$
- **Tangente en $x = 2$:** horizontale, d'équation $y = -3 \checkmark$

Réponse. $a = -3$ et $b = 1$; $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, minimum local en $x = 2$.

Correction de l'exercice 12 - Variations d'une somme

- **Somme $f + g$:** $(f + g)' = f' + g' \geq 0$, donc $f + g$ est **croissante** $\checkmark$
- **Différence $f - g$:** $(f - g)' = f' - g'$, de signe **indéterminé** — on ne peut rien conclure en général.
- **Contre-exemples :** avec $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$, $f - g = x$ est croissante ; avec $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$, $f - g = -x$ est **décroissante** $\checkmark$
- **Produit fg :** $(fg)' = f'g + fg'$, de signe indéterminé lui aussi.
- **Contre-exemple :** $f(x) = g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ donnent $fg = x^2$, qui **décroît** sur $] -\infty ; 0]$ $\checkmark$

- **Cas favorable** : si f et g sont croissantes **et positives**, alors $fg \geq 0$ et $fg' \geq 0$, donc fg est croissante ✓
- **Contrôle** : sur $[0; +\infty[$, $x \times x = x^2$ est bien croissante ✓
- **Composée** : si f et g sont croissantes, $g \circ f$ est croissante (deux « montées » se composent) ; si l'une est décroissante, la composée décroît.
- **À retenir** : seule la **somme** se comporte bien sans hypothèse supplémentaire. Pour le produit, il faut la positivité.

Réponse. $f + g$ croissante ; rien pour $f - g$ ni fg en général (fg croissante si $f, g \geq 0$).

Correction de l'exercice 13 - Résolution graphique

- **Dérivée** : $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
- **Racines** : $-\sqrt{2} \approx -1,4142$, 0 et $\sqrt{2}$.
- **Signe** : négative sur $] -\infty; -\sqrt{2}[$, positive sur $] -\sqrt{2}; 0[$, négative sur $] 0; \sqrt{2}[$, positive sur $] \sqrt{2}; +\infty[$.
- **Valeurs** : $f(\pm\sqrt{2}) = 4 - 8 = -4$ et $f(0) = 0$.
- **Variations** : décroît jusqu'à -4 , remonte à 0, redescend à -4 , remonte vers $+\infty$.
- **Extremums** : deux **minimums** globaux -4 en $\pm\sqrt{2}$; un **maximum local** 0 en $x = 0$.
- **Équation** $f(x) = -3$ — quatre intervalles de monotonie, et -3 est compris entre -4 et 0 dans chacun des quatre :
- **Conclusion** : **quatre** solutions ✓
- **Résolution exacte** : $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ donne, avec $X = x^2$, $X^2 - 4X + 3 = 0$ et $X \in \{1; 3\}$.
- **Solutions** : $x = \pm 1$ et $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,7321$ ✓
- **Contrôles** : $f(1) = 1 - 4 = -3$ ✓ et $f(\sqrt{3}) = 9 - 12 = -3$ ✓
- **Parité** : f est **paire**, d'où la symétrie parfaite du tableau et des solutions ✓

Réponse. Quatre solutions : ± 1 et $\pm\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Encadrement d'un extremum

- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, donc f croît sur $] -\infty; 0[$, décroît sur $] 0; 2[$, croît sur $] 2; +\infty[$.
- **Valeurs** : $f(0) = 1$ et $f(2) = -3$.
- **Trois racines** : une dans $] -\infty; 0[$, une dans $] 0; 2[$, une dans $] 2; +\infty[$.
- **Plus grande racine** : sur $] 2; +\infty[$, f croît de -3 à $+\infty$.
- **Balayage** : $f(2,8) = 21,952 - 23,52 + 1 = -0,568 < 0$ et $f(2,9) = 24,389 - 25,23 + 1 = 0,159 > 0$.
$$2,8 < \alpha < 2,9$$
- **Affinement** : $f(2,87) \approx 23,6394 - 24,7101 + 1 = -0,0708 < 0$ et $f(2,88) \approx 23,8879 - 24,8832 + 1 = 0,0047 > 0$.
- **Valeur** : $\alpha \approx 2,8794$.
- **Contrôles des autres racines** : $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc une racine dans $] -1; 0[$, environ $-0,5321$ ✓
- $f(0,6) = 0,216 - 1,08 + 1 = 0,136 > 0$ et $f(0,7) = 0,343 - 1,47 + 1 = -0,127 < 0$, donc une racine dans $] 0,6; 0,7[$, environ $0,6527$ ✓
- **Contrôle de la somme des racines** : $-0,5321 + 0,6527 + 2,8794 = 3,0000$, et la somme des racines d'un polynôme unitaire de degré 3 vaut $-\frac{b}{a} = 3$ ✓

- **Contrôle du produit** : $-0,5321 \times 0,6527 \times 2,8794 \approx -1,0001$, et le produit vaut $-\frac{d}{a} = -1$ ✓

Réponse. $2,8 < \alpha < 2,9$ (plus précisément $\alpha \approx 2,879$).

Correction de l'exercice 15 - Étude d'une fonction rationnelle

- **Dérivée** : avec $u = x^2 + 1$ et $v = x - 1$,

$$f(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

- **Racines du numérateur** : $\Delta = 4 + 4 = 8$, donc $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.
- **Racine dans le domaine** : $1 + \sqrt{2} \approx 2,4142$.
- **Signe** : négative avant, positive après — **minimum** en $x = 1 + \sqrt{2}$ ✓
- **Valeur du minimum** : avec $x = 1 + \sqrt{2}$, on a $x - 1 = \sqrt{2}$ et $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, donc

$$f(1 + \sqrt{2}) = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2 \approx 4,8284$$

- **Contrôles** : $f(2) = \frac{5}{1} = 5$ et $f(3) = \frac{10}{2} = 5$ — tous deux supérieurs à 4,8284 ✓
- **Contrôle intermédiaire** : $f(2,4) = \frac{6,76}{1,4} \approx 4,8286$, très proche du minimum ✓
- **Limites** : $+\infty$ en 1^+ (numérateur $\rightarrow 2 > 0$, dénominateur $\rightarrow 0^+$) et $+\infty$ en $+\infty$ ✓
- **Réécriture** : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$, ce qui montre l'asymptote oblique $y = x + 1$ ✓
- **Contrôle** : en posant $t = x - 1 > 0$, $f = t + 2 + \frac{2}{t} \geq 2 + 2\sqrt{2}$ par l'inégalité arithmético-géométrique ✓

Réponse. Minimum $2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83$ en $x = 1 + \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude et équation

- a) **Dérivée** : $f(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$.

- **Racines** : $x = -1$ et $x = 2$.
- **Variations** : croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$.
- **Valeurs** :

$$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12 \quad f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$$

- **Extremums** : maximum local 12 en -1 , minimum local -15 en 2 .
- **Limites** : $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$.

- b) **Équation** $f(x) = 0$ — intervalle par intervalle :

- sur $] -\infty ; -1]$: f croît de $-\infty$ à 12, **une** solution ;
- sur $[-1 ; 2]$: f décroît de 12 à -15 , **une** solution ;
- sur $[2 ; +\infty[$: f croît de -15 à $+\infty$, **une** solution.
- **Conclusion** : **trois** solutions ✓

- c) **Plus petite solution** — dans $] -\infty ; -1[$:

- $f(-2) = -16 - 12 + 24 + 5 = 1 > 0$ et $f(-3) = -54 - 27 + 36 + 5 = -40 < 0$, donc la racine est dans $] -3 ; -2[$.
- **Balayage** : $f(-2,1) = -18,522 - 13,23 + 25,2 + 5 = -1,552 < 0$ et $f(-2) = 1 > 0$.

$$-2,1 < \alpha < -2$$

- **Valeur** : $\alpha \approx -2,0406$.
- **Contrôle** : $f(-2,04) \approx -16,9788 - 12,4848 + 24,48 + 5 \approx 0,0159$, presque nul ✓
- **Autres racines** : $f(0) = 5 > 0$ et $f(1) = 2 - 3 - 12 + 5 = -8 < 0$, donc une racine dans $]0; 1[$, environ 0,3887 ✓
- $f(3) = 54 - 27 - 36 + 5 = -4 < 0$ et $f(4) = 128 - 48 - 48 + 5 = 37 > 0$, donc une racine dans $]3; 4[$, environ 3,1519 ✓
- **Contrôle par la somme des racines** : $-2,0406 + 0,3887 + 3,1519 = 1,5000$, et la somme vaut $-\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ ✓

Réponse. a) max 12 en -1 , min -15 en 2 · b) trois solutions · c) $-2,1 < \alpha < -2$.