Plaquette 1 – Lire, justifier et exploiter les variations

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les variations.

— **Taux de variation** de f entre a et b ($a \neq b$) :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Il donne le coefficient directeur de la corde ; s'il est positif pour tous les couples d'un intervalle, f y est croissante.

— f est **croissante** sur I si pour tous $a \leq b$ de I, $f(a) \leq f(b)$; **décroissante** si l'ordre est inversé.

— Fonctions de référence : $x \mapsto x^2$ décroît sur $]-\infty\,;0]$ puis croît ; $x \mapsto \sqrt{x}$ croît sur $[0\,;+\infty[$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

— **Forme canonique** : $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ a pour extremum β atteint en α — minimum si $a>0$, maximum si $a<0$.

— Lien avec la dérivée : $f'>0 \Rightarrow f$ croissante, $f'<0 \Rightarrow f$ décroissante.

— Un **extremum global** est la plus grande (ou plus petite) valeur sur tout l'intervalle ; un extremum **local** ne l'est qu'au voisinage du point.

— Comparer deux fonctions : on étudie le **signe de la différence** $f(x)-g(x)$.

— Nombre de solutions de $f(x)=k$: on compte les « traversées » du niveau k dans le tableau de variations.

Correction de l'exercice 1 – Taux de variation

On applique la formule du cours $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

— Entre 1 et 3 : $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4$. Le taux est **positif** : sur $[1\,;3]$, la fonction croît.

— Entre -3 et -1 : $\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)} = \frac{1-9}{2} = -4$. Le taux est **négatif** : sur $[-3\,;-1]$, la fonction décroît.

— On retrouve les variations de la fonction carré : décroissante sur les négatifs, croissante sur les positifs.

Réponse. 4 puis -4 : f croît sur $[1\,;3]$ et décroît sur $[-3\,;-1]$.

Correction de l'exercice 2 – Démontrer une monotonie

Soient a et b deux réels avec $a \neq b$.

— Calcul du taux : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(3b+2)-(3a+2)}{b-a} = \frac{3(b-a)}{b-a} = 3$.

— Le taux vaut 3, **strictement positif**, quels que soient a et b.

— Donc si $a<b$, alors $f(b)-f(a) = 3(b-a) > 0$, c'est-à-dire $f(a)<f(b)$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— Remarque : pour une fonction affine $x \mapsto mx+p$, le taux de variation est constant et vaut m. Le sens de variation ne dépend donc que du signe de m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Le taux vaut $3 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 – Forme canonique et extremum

a) L'expression est déjà sous forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=1>0$, $\alpha=3$ et $\beta=2$.

— Un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x)\geq 2$, avec égalité si et seulement si $x=3$.
— f admet donc un **minimum global** égal à 2, atteint en $x=3$.

b) Variations :

Intervalle	$]-\infty\,;3]$	$[3\,;+\infty[$
Variations de f	décroissante	croissante
Valeurs	de $+\infty$ à 2	de 2 à $+\infty$

— Contrôle : $f(0)=9+2=11$ et $f(4)=1+2=3$: la fonction a bien baissé jusqu'à 3 puis remonte.

Réponse. a) Minimum global 2 en $x=3$ · b) décroissante sur $]-\infty\,;3]$, croissante sur $[3\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 4 – Maximum d'un trinôme

a) Forme canonique avec $a=-2<0$, $\alpha=-1$, $\beta=8$.

— Comme $a<0$, f admet un **maximum global** égal à 8, atteint en $x=-1$.

b) On résout :

— $-2(x+1)^2+8=0$ donne $2(x+1)^2=8$, puis $(x+1)^2=4$.
— Donc $x+1=2$ ou $x+1=-2$, c'est-à-dire $x=1$ ou $x=-3$.
— Vérification : $f(1)=-2\times 4+8=0$ et $f(-3)=-2\times 4+8=0$.
— Remarque : les deux racines sont symétriques par rapport à $\alpha=-1$, ce qui est toujours le cas.

Réponse. a) Maximum 8 en $x=-1$ · b) $S=\{-3\,;1\}$.

Correction de l'exercice 5 – Exploiter un tableau de variations

a) On lit les valeurs atteintes aux extrémités des trois branches.

— Les valeurs extrêmes du tableau sont -5 (en $x=-4$) et 7 (en $x=6$).
— Donc le **minimum global** est -5 et le **maximum global** est 7. La valeur 3 atteinte en $x=-1$ n'est qu'un maximum **local**.

b) On compte les branches qui traversent le niveau 0 :

— sur $[-4\,;-1]$, f passe de -5 à 3 : elle traverse 0 **une** fois ;
— sur $[-1\,;2]$, f passe de 3 à -2 : elle traverse 0 une fois ;
— sur $[2\,;6]$, f passe de -2 à 7 : encore une fois.
— L'équation $f(x)=0$ a donc **trois** solutions.

c) La valeur 3 est atteinte en $x=-1$ (sommet de la première branche). Sur $[2\,;6]$, f croît de -2 à 7 : elle prend donc aussi la valeur 3 une fois, en un point $x_0\in\,]2\,;6[$.

— Conclusion : $f(x)=3$ a **deux** solutions, $x=-1$ et un réel x_0 entre 2 et 6.

Réponse. a) min -5, max 7 · b) trois solutions · c) deux solutions ($x=-1$ et $x_0\in\,]2\,;6[$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Variations et dérivée

— Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

— Le trinôme a pour racines 1 et 3, avec un coefficient dominant positif : f' est positive à l'extérieur de $[1\,;3]$, négative entre 1 et 3.

Intervalle	$]-\infty\,;1]$	$[1\,;3]$	$[3\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	+	−	+
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

— $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$: **maximum local** égal à 4.

— $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$: **minimum local** égal à 0.

— Ce ne sont pas des extremums globaux : $f(x)$ devient aussi grand (et aussi petit) que l'on veut aux bornes.

Réponse. Maximum local 4 en $x = 1$, minimum local 0 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 7 – Comparer deux fonctions

Méthode du cours : on étudie le **signe de la différence**.

— $f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$.

— Sur $]0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$: le signe de la différence est celui de $1 - x$.

— Sur $]0\,;1[$: $1 - x > 0$, donc $f(x) > g(x)$, c'est-à-dire $x^2 > x^3$.

— Sur $]1\,;+\infty[$: $1 - x < 0$, donc $f(x) < g(x)$, c'est-à-dire $x^2 < x^3$.

— Contrôle numérique : pour $x = 0{,}5$, $0{,}25 > 0{,}125$; pour $x = 2$, $4 < 8$. Cohérent.

— Graphiquement, les deux courbes se coupent en $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$, et échangent leur position en $x = 1$.

Réponse. $x^2 > x^3$ sur $]0\,;1[$ et $x^2 < x^3$ sur $]1\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 8 – Variations d'une fonction inverse translatée

Sans dérivée. La fonction inverse $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$. Ici $t = x - 2$ est une fonction croissante de x.

— Quand x croît, $x - 2$ croît, donc $\dfrac{1}{x-2}$ décroît : f est décroissante sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

Avec la dérivée. On dérive le quotient, ou on utilise directement la dérivée de $\frac{1}{u}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

— Un carré est strictement positif, donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 2$: la décroissance est confirmée sur chacun des deux intervalles.

Piège. f n'est **pas** décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ pris globalement : $f(1) = -1$ alors que $f(3) = 1$, donc $f(1) < f(3)$ bien que $1 < 3$.

Réponse. f est décroissante sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$ (mais pas globalement).

Correction de l'exercice 9 – Problème : trajectoire d'un ballon

a) h est une fonction du second degré avec $a = -5 < 0$: elle admet un maximum.

— Dérivée : $h'(t) = -10t + 20$, nulle pour $t = 2$, positive avant, négative après.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Le maximum est atteint à $t = 2$ s, et vaut $h(2) = -5 \times 4 + 40 + 1 = -20 + 41 = 21$ m.

b) Le ballon est au sol quand $h(t) = 0$, soit $-5t^2 + 20t + 1 = 0$.

— Discriminant : $\Delta = 20^2 - 4 \times (-5) \times 1 = 400 + 20 = 420 > 0$, et $\sqrt{420} \approx 20{,}49$.

— Racines : $t = \dfrac{-20 \pm 20{,}49}{-10}$, ce qui donne $t_1 \approx -0{,}05$ et $t_2 \approx 4{,}05$.

— La solution négative est à rejeter (elle précède le lancer) : le ballon retombe au bout d'environ 4,05 s.

— Cohérence : le sommet est à $t = 2$, et la chute dure un peu plus longtemps que la montée car le ballon part de 1 m de haut.

Réponse. a) Hauteur maximale 21 m à $t = 2$ s · b) retour au sol à $t \approx 4{,}05$ s.

Correction de l'exercice 10 – Problème : boîte de volume maximal

a) Après découpe, la base est un carré de côté $12 - 2x$ et la hauteur vaut x.

— Donc $V(x) = x(12 - 2x)^2$.

— Contraintes : $x > 0$ et $12 - 2x > 0$, soit $x \in]0\,;6[$.

b) On développe avant de dériver, c'est plus simple :

— $(12 - 2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2$, donc $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

— $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$.

— Sur $]0\,;6[$: $x - 6 < 0$, donc V' a le signe contraire de $x - 2$: positive sur $]0\,;2[$, négative sur $]2\,;6[$.

— V est donc maximale en $x = 2$: $V(2) = 2 \times 8^2 = 2 \times 64 = 128$ cm³.

— Contrôle : $V(1) = 1 \times 100 = 100$ et $V(3) = 3 \times 36 = 108$, tous deux inférieurs à 128.

Réponse. a) $V(x) = x(12 - 2x)^2$ sur $]0\,;6[$ · b) maximum 128 cm³ pour $x = 2$ cm.

Correction de l'exercice 11 – Nombre dérivé et tangente

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Ici $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$, et $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(3) = 2$:

$$y = 2(x - 3) - 2 = 2x - 8$$

Le nombre dérivé $f'(3) = 2$ est positif : au voisinage de 3, la courbe monte, et f est croissante. Plus précisément, $f'(x) = 2x - 4 > 0$ pour $x > 2$: f est croissante sur $[2\,;+\infty[$, qui contient 3.

Contrôle : la tangente passe bien par $(3\,;-2)$, car $2 \times 3 - 8 = -2$. Réponse : $y = 2x - 8$; f est croissante au voisinage de 3.

Réponse. $y = 2x - 8$; f croissante au voisinage de 3 car $f'(3) = 2 > 0$.

Correction de l'exercice 12 – Variations d'un quotient

On dérive le quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $u = 2x + 1$, $u' = 2$, $v = x + 3$ et $v' = 1$, selon $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{2(x + 3) - (2x + 1)}{(x + 3)^2} = \frac{5}{(x + 3)^2}$$

Sur $]-3\,;+\infty[$, le dénominateur est un carré non nul, donc strictement positif, et le numérateur vaut 5 : $f'(x) > 0$. La fonction f est **strictement croissante** sur $]-3\,;+\infty[$.

Contrôle : $f(0) = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}33$ et $f(2) = \dfrac{5}{5} = 1$, plus grand. La fonction est strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 13 – Problème : coût moyen minimal

Le coût moyen est le coût total divisé par le nombre d'objets :

$$M(q) = \frac{q^2+100}{q} = q + \frac{100}{q}$$

On dérive : $M'(q) = 1 - \dfrac{100}{q^2} = \dfrac{q^2-100}{q^2} = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$. Pour $q > 0$, q^2 et $q+10$ sont positifs : $M'(q)$ a le signe de $q-10$, négatif avant 10 et positif après. Le coût moyen décroît puis croît : il est minimal pour $q = 10$, et vaut $M(10) = 10 + 10 = 20$ €.

Contrôle : $M(5) = 25$ et $M(20) = 25$, supérieurs à 20. Il faut produire 10 **objets**, pour un coût moyen de 20 **€**.

Réponse. $q = 10$ objets, coût moyen minimal 20 €.

Correction de l'exercice 14 – Extremums d'une cubique

On dérive et on factorise :

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$$

Le trinôme a un coefficient dominant négatif : il est négatif à l'extérieur de ses racines -1 et 1, positif entre elles. La fonction décroît sur $]-\infty\,;-1]$, croît sur $[-1\,;1]$, puis décroît sur $[1\,;+\infty[$.

Intervalle	$]-\infty\,;-1]$	$[-1\,;1]$	$[1\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	−	+	−
Variations de f	décroissante	croissante	décroissante

On calcule $f(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$, minimum local, et $f(1) = -1 + 3 + 2 = 4$, maximum local.

Contrôle : $f(0) = 2$, compris entre 0 et 4. Réponses : minimum local 0 en -1, maximum local 4 en 1.

Réponse. Minimum local 0 en $x = -1$, maximum local 4 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : encadrement par les variations

a) $f'(x) = 4x - 8$, nulle en $x = 2$, négative avant, positive après.

— $f(0) = 5$, $f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$, $f(5) = 50 - 40 + 5 = 15$.

Intervalle	$[0\,;2]$	$[2\,;5]$
Signe de $f'(x)$	−	+
Variations de f	de 5 à -3	de -3 à 15

b) Le minimum sur $[0\,;5]$ vaut -3 (en $x = 2$) et le maximum vaut 15 (en $x = 5$), donc

$$-3 \leq f(x) \leq 15 \quad \text{pour tout } x \in [0\,;5]$$

c) On compte les traversées du niveau 0 :

— sur $[0\,;2]$, f décroît de 5 à -3 : une solution ;

— sur $[2\,;5]$, f croît de -3 à 15 : une solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— L’équation a donc **deux** solutions. On peut les calculer : $\Delta = 64 - 40 = 24$, $\sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4{,}90$, d’où $x = \dfrac{8 \pm 4{,}90}{4}$, soit $x \approx 0{,}78$ et $x \approx 3{,}22$, toutes deux dans $[0\,;5]$.

Réponse. b) $-3 \le f(x) \le 15$ · c) deux solutions ($\approx 0{,}78$ et $\approx 3{,}22$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).