

Plaquette 1 - Lire, justifier et exploiter les variations

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les variations.

- **Taux de variation** de f entre a et b ($a \neq b$) :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il donne le coefficient directeur de la corde ; s'il est positif pour tous les couples d'un intervalle, f y est croissante.

- f est **croissante** sur I si pour tous $a \leq b$ de I , $f(a) \leq f(b)$; **décroissante** si l'ordre est inversé.
- Fonctions de référence : $x \mapsto x^2$ décroît sur $] - \infty ; 0]$ puis croît ; $x \mapsto \sqrt{x}$ croît sur $[0 ; +\infty[$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $] - \infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- **Forme canonique** : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ a pour extremum β atteint en α — minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$.
- Lien avec la dérivée : $f' > 0 \Rightarrow f$ croissante, $f' < 0 \Rightarrow f$ décroissante.
- Un **extremum global** est la plus grande (ou plus petite) valeur sur tout l'intervalle ; un extremum **local** ne l'est qu'au voisinage du point.
- Comparer deux fonctions : on étudie le **signe de la différence** $f(x) - g(x)$.
- Nombre de solutions de $f(x) = k$: on compte les « traversées » du niveau k dans le tableau de variations.

Correction de l'exercice 1 - Taux de variation

On applique la formule du cours $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- Entre 1 et 3 : $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$. Le taux est **positif** : sur $[1 ; 3]$, la fonction croît.
- Entre -3 et -1 : $\frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{1 - 9}{2} = -4$. Le taux est **négatif** : sur $[-3 ; -1]$, la fonction décroît.
- On retrouve les variations de la fonction carré : décroissante sur les négatifs, croissante sur les positifs.

Réponse. 4 puis -4 : f croît sur $[1 ; 3]$ et décroît sur $[-3 ; -1]$.

Correction de l'exercice 2 - Démontrer une monotonie

Soient a et b deux réels avec $a \neq b$.

- Calcul du taux : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(3b + 2) - (3a + 2)}{b - a} = \frac{3(b - a)}{b - a} = 3$.
- Le taux vaut 3, **strictement positif**, quels que soient a et b .
- Donc si $a < b$, alors $f(b) - f(a) = 3(b - a) > 0$, c'est-à-dire $f(a) < f(b)$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Remarque : pour une fonction affine $x \mapsto mx + p$, le taux de variation est constant et vaut m . Le sens de variation ne dépend donc que du signe de m .

Réponse. Le taux vaut $3 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 - Forme canonique et extremum

- a) L'expression est déjà sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1 > 0$, $\alpha = 3$ et $\beta = 2$.
 — Un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x) \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x = 3$.
 — f admet donc un **minimum global** égal à 2, atteint en $x = 3$.
 b) Variations :

Intervalle	$] - \infty ; 3]$	$[3 ; +\infty[$
Variations de f	décroissante	croissante
Valeurs	de $+\infty$ à 2	de 2 à $+\infty$

- Contrôle : $f(0) = 9 + 2 = 11$ et $f(4) = 1 + 2 = 3$: la fonction a bien baissé jusqu'à 3 puis remonte.

Réponse. a) Minimum global 2 en $x = 3$ · b) décroissante sur $] - \infty ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 4 - Maximum d'un trinôme

- a) Forme canonique avec $a = -2 < 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 8$.
 — Comme $a < 0$, f admet un **maximum global** égal à 8, atteint en $x = -1$.
 b) On résout :
 — $-2(x + 1)^2 + 8 = 0$ donne $2(x + 1)^2 = 8$, puis $(x + 1)^2 = 4$.
 — Donc $x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -3$.
 — Vérification : $f(1) = -2 \times 4 + 8 = 0$ et $f(-3) = -2 \times 4 + 8 = 0$.
 — Remarque : les deux racines sont symétriques par rapport à $\alpha = -1$, ce qui est toujours le cas.

Réponse. a) Maximum 8 en $x = -1$ · b) $S = \{-3 ; 1\}$.

Correction de l'exercice 5 - Exploiter un tableau de variations

- a) On lit les valeurs atteintes aux extrémités des trois branches.
 — Les valeurs extrêmes du tableau sont -5 (en $x = -4$) et 7 (en $x = 6$).
 — Donc le **minimum global** est -5 et le **maximum global** est 7 . La valeur 3 atteinte en $x = -1$ n'est qu'un maximum **local**.
 b) On compte les branches qui traversent le niveau 0 :
 — sur $[-4 ; -1]$, f passe de -5 à 3 : elle traverse 0 **une** fois ;
 — sur $[-1 ; 2]$, f passe de 3 à -2 : elle traverse 0 une fois ;
 — sur $[2 ; 6]$, f passe de -2 à 7 : encore une fois.
 — L'équation $f(x) = 0$ a donc **trois** solutions.
 c) La valeur 3 est atteinte en $x = -1$ (sommet de la première branche). Sur $[2 ; 6]$, f croît de -2 à 7 : elle prend donc aussi la valeur 3 une fois, en un point $x_0 \in]2 ; 6[$.
 — Conclusion : $f(x) = 3$ a **deux** solutions, $x = -1$ et un réel x_0 entre 2 et 6.

Réponse. a) min -5 , max 7 · b) trois solutions · c) deux solutions ($x = -1$ et $x_0 \in]2 ; 6[$).

Correction de l'exercice 6 - Variations et dérivée

- Dérivée : $f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.
- Le trinôme a pour racines 1 et 3, avec un coefficient dominant positif : f est positive à l'extérieur de $[1; 3]$, négative entre 1 et 3.

Intervalle	$] - \infty ; 1]$	$[1 ; 3]$	$[3 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	+	−	+
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

- $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$: **maximum local** égal à 4.
- $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$: **minimum local** égal à 0.
- Ce ne sont pas des extremums globaux : $f(x)$ devient aussi grand (et aussi petit) que l'on veut aux bornes.

Réponse. Maximum local 4 en $x = 1$, minimum local 0 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 7 - Comparer deux fonctions

Méthode du cours : on étudie le **signe de la différence**.

- $f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$.
- Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$: le signe de la différence est celui de $1 - x$.
- Sur $]0; 1[$: $1 - x > 0$, donc $f(x) > g(x)$, c'est-à-dire $x^2 > x^3$.
- Sur $]1; +\infty[$: $1 - x < 0$, donc $f(x) < g(x)$, c'est-à-dire $x^2 < x^3$.
- Contrôle numérique : pour $x = 0,5$, $0,25 > 0,125$; pour $x = 2$, $4 < 8$. Cohérent.
- Graphiquement, les deux courbes se coupent en $(0; 0)$ et $(1; 1)$, et échangent leur position en $x = 1$.

Réponse. $x^2 > x^3$ sur $]0; 1[$ et $x^2 < x^3$ sur $]1; +\infty[$.

Correction de l'exercice 8 - Variations d'une fonction inverse translatée

Sans dérivée. La fonction inverse $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $] - \infty ; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Ici $t = x - 2$ est une fonction croissante de x .

- Quand x croît, $x - 2$ croît, donc $\frac{1}{x - 2}$ décroît : f est décroissante sur $] - \infty ; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

Avec la dérivée. On dérive le quotient, ou on utilise directement la dérivée de $\frac{1}{u}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - 2)^2}$$

- Un carré est strictement positif, donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 2$: la décroissance est confirmée sur chacun des deux intervalles.

Piège. f n'est **pas** décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ pris globalement : $f(1) = -1$ alors que $f(3) = 1$, donc $f(1) < f(3)$ bien que $1 < 3$.

Réponse. f est décroissante sur $] - \infty ; 2[$ et sur $]2; +\infty[$ (mais pas globalement).

Correction de l'exercice 9 - Problème : trajectoire d'un ballon

- a) h est une fonction du second degré avec $a = -5 < 0$: elle admet un maximum.
- Dérivée : $h'(t) = -10t + 20$, nulle pour $t = 2$, positive avant, négative après.

- Le maximum est atteint à $t = 2$ s, et vaut $h(2) = -5 \times 4 + 40 + 1 = -20 + 41 = 21$ m.
- b) Le ballon est au sol quand $h(t) = 0$, soit $-5t^2 + 20t + 1 = 0$.
- Discriminant : $\Delta = 20^2 - 4 \times (-5) \times 1 = 400 + 20 = 420 > 0$, et $\sqrt{420} \approx 20,49$.
- Racines : $t = \frac{-20 \pm 20,49}{-10}$, ce qui donne $t_1 \approx -0,05$ et $t_2 \approx 4,05$.
- La solution négative est à rejeter (elle précède le lancer) : le ballon retombe au bout d'environ 4,05 s.
- Cohérence : le sommet est à $t = 2$, et la chute dure un peu plus longtemps que la montée car le ballon part de 1 m de haut.

Réponse. a) Hauteur maximale 21 m à $t = 2$ s · b) retour au sol à $t \approx 4,05$ s.

Correction de l'exercice 10 - Problème : boîte de volume maximal

- a) Après découpe, la base est un carré de côté $12 - 2x$ et la hauteur vaut x .
- Donc $V(x) = x(12 - 2x)^2$.
 - Contraintes : $x > 0$ et $12 - 2x > 0$, soit $x \in]0 ; 6[$.
- b) On développe avant de dériver, c'est plus simple :
- $(12 - 2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2$, donc $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
 - $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$.
 - Sur $]0 ; 6[$: $x - 6 < 0$, donc V' a le signe contraire de $x - 2$: positive sur $]0 ; 2[$, négative sur $]2 ; 6[$.
 - V est donc maximale en $x = 2$: $V(2) = 2 \times 8^2 = 2 \times 64 = 128 \text{ cm}^3$.
 - Contrôle : $V(1) = 1 \times 100 = 100$ et $V(3) = 3 \times 36 = 108$, tous deux inférieurs à 128.

Réponse. a) $V(x) = x(12 - 2x)^2$ sur $]0 ; 6[$ · b) maximum 128 cm^3 pour $x = 2$ cm.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : encadrement par les variations

- a) $f(x) = 4x - 8$, nulle en $x = 2$, négative avant, positive après.
- $f(0) = 5$, $f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$, $f(5) = 50 - 40 + 5 = 15$.

Intervalle	$[0 ; 2]$	$[2 ; 5]$
Signe de $f(x)$	—	+
Variations de f	de 5 à -3	de -3 à 15

- b) Le minimum sur $[0 ; 5]$ vaut -3 (en $x = 2$) et le maximum vaut 15 (en $x = 5$), donc
- $$-3 \leq f(x) \leq 15 \quad \text{pour tout } x \in [0 ; 5]$$

- c) On compte les traversées du niveau 0 :
- sur $[0 ; 2]$, f décroît de 5 à -3 : une solution ;
 - sur $[2 ; 5]$, f croît de -3 à 15 : une solution.
 - L'équation a donc **deux** solutions. On peut les calculer : $\Delta = 64 - 40 = 24$,
 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4,90$, d'où $x = \frac{8 \pm 4,90}{4}$, soit $x \approx 0,78$ et $x \approx 3,22$, toutes deux dans $[0 ; 5]$.

Réponse. b) $-3 \leq f(x) \leq 15$ · c) deux solutions ($\approx 0,78$ et $\approx 3,22$).