Plaquette 3 – Problèmes d'optimisation : aires, volumes, coûts et distances

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les cinq étapes d'un problème d'optimisation.

1. **Nommer** l'inconnue et faire une figure ou un schéma mental. 2. **Traduire** les contraintes (périmètre fixé, volume imposé, …) pour éliminer les inconnues superflues. 3. **Exprimer** la quantité à optimiser comme **une** fonction d'**une** variable, et donner son **domaine**. 4. **Dériver**, factoriser, étudier le signe. 5. **Conclure** en revenant à la question posée (dimensions, prix, quantité) et **vérifier** la cohérence.

Formules géométriques utiles.

Objet	Aire / Volume
rectangle $a \times b$	ab, périmètre $2(a+b)$
triangle	$\frac{bh}{2}$
disque de rayon r	πr^2, périmètre $2\pi r$
cylindre	$V = \pi r^2 h$, aire totale $2\pi r^2 + 2\pi rh$
cône	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
pavé $a \times b \times c$	$V = abc$, aire $2(ab+ac+bc)$

Économie.

— **Coût marginal** : $C'(q)$ — coût de la dernière unité produite.

— **Coût moyen** : $\frac{C(q)}{q}$, minimal là où il **égale** le coût marginal.

— **Bénéfice** : $B(q) = R(q) - C(q)$, maximal là où $R'(q) = C'(q)$.

Distances. Pour minimiser une distance, on minimise son **carré** — c'est équivalent (la racine est croissante) et beaucoup plus simple à dériver :

$$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$$

Vérification finale obligatoire. L'optimum trouvé appartient-il au domaine ? Le signe de la dérivée confirme-t-il bien un maximum (et non un minimum) ?

Correction de l'exercice 1 – Rectangle de périmètre fixé

— **Notations** : côtés x et y, avec $2(x+y) = 40$, donc $y = 20 - x$ et $0 < x < 20$.

— **Aire** :

$$A(x) = x(20-x) = 20x - x^2$$

— **Dérivée** : $A'(x) = 20 - 2x = 2(10 - x)$.

— **Signe** : positive avant 10, négative après — **maximum** en $x = 10$ ✓

— **Conclusion** : le rectangle est un **carré** de côté 10 cm, d'aire 100 cm².

— **Contrôles** : $A(8) = 8 \times 12 = 96$ et $A(12) = 12 \times 8 = 96$ — inférieurs à 100 ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Symétrie** : $A(10-h) = A(10+h)$, la fonction est symétrique autour de 10 ✓
— **Résultat général** : à périmètre fixé, le **carré** maximise l'aire parmi les rectangles ; et parmi toutes les figures, c'est le **disque**.
— **Comparaison avec le disque** : un cercle de périmètre 40 cm a un rayon $\frac{40}{2\pi} \approx 6{,}366$ cm et une aire $\pi r^2 \approx 127{,}3$ cm² — bien plus que 100 cm² ✓

Réponse. Le carré de côté 10 cm, d'aire 100 cm².

Correction de l'exercice 2 – Enclos contre un mur

— **Notations** : x la largeur (deux côtés), y la longueur le long du mur, avec $2x + y = 60$.
— **Contrainte** : $y = 60 - 2x$ et $0 < x < 30$.
— **Aire** :

$$A(x) = x(60-2x) = 60x - 2x^2$$

— **Dérivée** : $A'(x) = 60 - 4x = 4(15-x)$.
— **Maximum** en $x = 15$ m, avec $y = 30$ m.
— **Aire maximale** :

$$A(15) = 15 \times 30 = 450 \text{ m}^2$$

— **Contrôles** : $A(12) = 12 \times 36 = 432$ et $A(18) = 18 \times 24 = 432$ ✓
— **Propriété** : la longueur est le **double** de la largeur — différent du cas sans mur (où l'on obtenait un carré) ✓
— **Comparaison** : sans mur, 60 m de clôture donneraient un carré de 15 m de côté, d'aire 225 m² — **deux fois moins** ✓
— **Généralisation** : avec P mètres de clôture et un mur, l'aire maximale vaut $\frac{P^2}{8}$; ici $\frac{3600}{8} = 450$ ✓

Réponse. 15 m × 30 m, pour 450 m².

Correction de l'exercice 3 – Boîte de volume maximal

— **Dimensions de la boîte** : $(30-2x)$, $(18-2x)$ et hauteur x, avec $0 < x < 9$.
— **Volume** :

$$V(x) = x(30-2x)(18-2x) = x\left(540 - 96x + 4x^2\right) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$$

— **Dérivée** : $V'(x) = 12x^2 - 192x + 540 = 12\left(x^2 - 16x + 45\right)$.
— **Racines** : $\Delta = 256 - 180 = 76$, donc $x = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{2} = 8 \pm \sqrt{19}$.
— **Valeurs** : $\sqrt{19} \approx 4{,}3589$, donc $x_1 \approx 3{,}6411$ et $x_2 \approx 12{,}359$ (hors domaine).
— **Signe sur** $]0\,;9[$: positive avant 3,6411, négative après — **maximum** ✓
— **Volume maximal** :

$$V(3{,}6411) \approx 3{,}6411 \times 22{,}718 \times 10{,}718 \approx 886{,}6 \text{ cm}^3$$

— **Contrôles** : $V(3) = 3 \times 24 \times 12 = 864$ et $V(4) = 4 \times 22 \times 10 = 880$ — tous deux inférieurs ✓
— **Contrôle de la dérivée** : $V'(3) = 12(9 - 48 + 45) = 72 > 0$ ✓ et $V'(4) = 12(16 - 64 + 45) = -36 < 0$ ✓
— **Remarque** : l'optimum 3,64 cm n'est pas « rond » — c'est la règle dès que la feuille n'est pas carrée.

Réponse. $x = 8 - \sqrt{19} \approx 3{,}64$ cm, pour $V \approx 886{,}6$ cm³.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 4 – Cylindre de volume imposé

— **Contrainte** : $\pi r^2 h = 1000$, donc $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.

— **Surface totale** (deux disques et le tube) :

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

— **Dérivée** :

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$$

— **Racine** : $r^3 = \dfrac{500}{\pi} \approx 159{,}155$, donc $r \approx 5{,}4193$ cm.

— **Signe** : négative avant, positive après — **minimum** ✓

— **Hauteur correspondante** : $h = \dfrac{1000}{\pi \times 29{,}369} \approx 10{,}839$ cm.

— **Propriété remarquable** : $h = 2r$ — la boîte optimale est aussi **haute que large** ✓

— **Surface minimale** : $2\pi \times 29{,}369 + \dfrac{2000}{5{,}4193} \approx 184{,}52 + 369{,}05 \approx 553{,}6$ cm².

— **Contrôles** : $S(5) = 157{,}08 + 400 = 557{,}08$ et $S(6) = 226{,}19 + 333{,}33 = 559{,}52$ — tous deux supérieurs ✓

— **Comparaison avec les boîtes réelles** : une boîte de conserve de 1 L fait souvent $r \approx 5$ cm et $h \approx 12{,}7$ cm, un peu plus haute que l'optimum — pour des raisons d'empilement et de préhension, pas de matière.

Réponse. $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$ cm et $h = 2r \approx 10{,}84$ cm.

Correction de l'exercice 5 – Bénéfice maximal

La recette est le nombre d'articles vendus multiplié par le prix unitaire : $R(q) = q(50 - 0{,}2q) = 50q - 0{,}2q^2$. Le bénéfice est la recette moins le coût :

$$B(q) = 50q - 0{,}2q^2 - (10q + 500) = -0{,}2q^2 + 40q - 500$$

On dérive : $B'(q) = -0{,}4q + 40$, qui s'annule en $q = 100$. Elle est positive avant 100 et négative après : B croît puis décroît, et atteint son **maximum** en $q = 100$.

$$B(100) = -2000 + 4000 - 500 = 1500$$

Le prix pratiqué est alors $p = 50 - 0{,}2 \times 100 = 30$ €.

Contrôle : $B(90) = B(110) = 1480$ €, moins que 1500 €. L'entreprise doit produire 100 **articles**, vendus 30 € pièce, pour un bénéfice de 1500 **€**.

Réponse. $q = 100$ articles au prix de 30 €, pour un bénéfice de 1500 €.

Correction de l'exercice 6 – Triangle d'aire maximale

— **Notations** : cathètes x et y avec $x^2 + y^2 = 100$, donc $y = \sqrt{100 - x^2}$ et $0 < x < 10$.

— **Aire** :

$$A(x) = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$$

— **Astuce** : on maximise $A^2 = \dfrac{x^2\left(100 - x^2\right)}{4}$, plus simple à dériver.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Posons** $t = x^2$: la fonction $\dfrac{t(100-t)}{4}$ est maximale pour $t = 50$ (sommet de la parabole).
— **Conclusion** : $x^2 = 50$, donc $x = 5\sqrt{2} \approx 7{,}0711$ et $y = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ également.
— **Triangle optimal** : **isocèle rectangle** de cathètes $5\sqrt{2}$ ✓
— **Aire maximale** :

$$A = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

— **Contrôles** : $x = 6$ donne $y = 8$ et $A = 24$ ✓ ; $x = 8$ donne $y = 6$ et $A = 24$ ✓ — tous deux inférieurs à 25.
— **Contrôle de l'hypoténuse** : $50 + 50 = 100$ ✓
— **Résultat général** : à hypoténuse fixée, le triangle rectangle **isocèle** maximise l'aire — les angles valent alors 45°, 45° et 90°.

Réponse. Cathètes $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm (triangle isocèle), aire 25 cm².

Correction de l'exercice 7 – Distance à une droite

— **Distance au carré** :

$$d(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

— **Dérivée** :

$$d'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3} = \frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3}$$

— **Racine positive** : $x = 1$.
— **Signe** : négative sur $]0\,;1[$, positive sur $]1\,;+\infty[$ — **minimum** en $x = 1$ ✓
— **Point** : $(1\,;1)$.
— **Distance** :

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$$

— **Contrôles** : en $x = 0{,}5$, $d = 0{,}25 + 4 = 4{,}25$ et la distance vaut 2,0616 ✓ ; en $x = 2$, $d = 4 + 0{,}25 = 4{,}25$ également ✓
— **Symétrie** : $d\left(\dfrac{1}{x}\right) = d(x)$ — la courbe est symétrique par rapport à la droite $y = x$, ce qui explique l'égalité ✓
— **Interprétation** : le point le plus proche est sur la **bissectrice** $y = x$, résultat prévisible par symétrie.
— **Inégalité associée** : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$ pour tout $x > 0$, avec égalité en $x = 1$ ✓

Réponse. Le point $(1\,;1)$, à la distance $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Correction de l'exercice 8 – Fenêtre en plein cintre

— **Notations** : r le rayon du demi-disque (donc la largeur du rectangle vaut $2r$) et h sa hauteur.
— **Périmètre** : $2r + 2h + \pi r = 8$ (la base, les deux côtés verticaux et le demi-cercle).
— **Contrainte** : $h = \dfrac{8 - 2r - \pi r}{2}$, avec $0 < r < \dfrac{8}{2+\pi}$.
— **Aire** :

$$A(r) = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = r(8 - 2r - \pi r) + \frac{\pi r^2}{2} = 8r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = 8r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Dérivée** : $A'(r) = 8 - 4r - \pi r = 8 - (4+\pi)r$.

— **Racine** :

$$r = \frac{8}{4+\pi} \approx 1{,}1202 \text{ m}$$

— **Hauteur** : $h = \dfrac{8 - 2\times 1{,}1202 - \pi \times 1{,}1202}{2} \approx \dfrac{8 - 2{,}2404 - 3{,}5190}{2} \approx 1{,}1202$ m.

— **Propriété remarquable** : $h = r$ exactement — la hauteur du rectangle égale le rayon, donc la fenêtre a une largeur double de la hauteur de sa partie rectangulaire ✓

— **Aire maximale** :
$8 \times 1{,}1202 - 2 \times 1{,}2548 - \dfrac{\pi \times 1{,}2548}{2} \approx 8{,}9616 - 2{,}5096 - 1{,}9711 \approx 4{,}4808$ m².

— **Contrôles** : $A(1) = 8 - 2 - 1{,}5708 = 4{,}4292$ et $A(1{,}25) = 10 - 3{,}125 - 2{,}4544 = 4{,}4206$ — tous deux inférieurs ✓

— **Domaine** : $\dfrac{8}{2+\pi} \approx 1{,}5559$, et $1{,}1202 < 1{,}5559$ ✓

Réponse. $r = \dfrac{8}{4+\pi} \approx 1{,}12$ m avec $h = r$; aire $\approx 4{,}48$ m².

Correction de l’exercice 9 – Coût de transport

Pour parcourir 100 km à la vitesse v, il faut $\dfrac{100}{v}$ heures. La consommation aux 100 km est donc la consommation horaire multipliée par cette durée :

$$C(v) = \frac{100}{v}\left(6 + \frac{v^2}{400}\right) = \frac{600}{v} + \frac{v}{4}$$

On dérive pour $v > 0$: $C'(v) = -\dfrac{600}{v^2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{v^2 - 2400}{4v^2}$. Le dénominateur est positif, donc $C'(v)$ a le signe de $v^2 - 2400$: négatif pour $v < \sqrt{2400}$, positif ensuite. La consommation est minimale pour

$$v = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6} \approx 49 \text{ km/h}$$

À cette vitesse, les deux termes sont égaux, environ 12,25 chacun, et $C \approx 24{,}5$ L aux 100 km. Rouler plus lentement consomme davantage, car le moteur tourne plus longtemps pour la même distance.

Contrôle : $C(40) = 15 + 10 = 25$ et $C(60) = 10 + 15 = 25$, tous deux supérieurs. La vitesse optimale est d’environ 49 **km/h**, pour environ 24,5 **L** aux 100 km.

Réponse. $v = 20\sqrt{6} \approx 49$ km/h, pour $2\sqrt{150} \approx 24{,}5$ L/100 km.

Correction de l’exercice 10 – Aire d’un trapèze inscrit

— **Paramétrage** : sommets supérieurs $(\pm x\,;\, y)$ avec $x^2 + y^2 = 4$, donc $y = \sqrt{4 - x^2}$ et $0 < x < 2$.

— **Aire du trapèze** : bases 4 et $2x$, hauteur y.

$$A(x) = \frac{(4+2x)y}{2} = (2+x)\sqrt{4-x^2}$$

— **Dérivée** — produit avec $u = 2 + x$ et $v = \sqrt{4-x^2}$, $v' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$:

$$A'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x(2+x)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4 - x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{4-x^2}}$$

— **Numérateur** : $-2\left(x^2 + x - 2\right) = -2(x+2)(x-1)$.

— **Racine dans le domaine** : $x = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Signe** : positive avant 1, négative après — **maximum** ✓
— **Dimensions** : $x = 1$, donc $y = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$; la petite base vaut 2.
— **Aire maximale** :

$$A(1) = 3\sqrt{3} \approx 5{,}1962$$

— **Contrôles** : $A(0{,}8) = 2{,}8 \times \sqrt{3{,}36} \approx 2{,}8 \times 1{,}8330 \approx 5{,}1323$ ✓ et $A(1{,}2) = 3{,}2 \times \sqrt{2{,}56} = 3{,}2 \times 1{,}6 = 5{,}12$ ✓
— **Remarque** : le trapèze optimal a ses côtés obliques de longueur $\sqrt{1+3} = 2$ — égale au rayon ! Les trois côtés non horizontaux valent donc 2 ✓

Réponse. $x = 1$ (petite base 2, hauteur $\sqrt{3}$), aire maximale $3\sqrt{3} \approx 5{,}20$.

Correction de l'exercice 11 – Pliage d'une gouttière

— **Notations** : hauteur x des deux rebords, largeur du fond $30 - 2x$, avec $0 < x < 15$.
— **Aire de la section** :

$$A(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$$

— **Dérivée** : $A'(x) = 30 - 4x$.
— **Racine** : $x = 7{,}5$ cm.
— **Signe** : positive avant, négative après — **maximum** ✓
— **Dimensions** : hauteur 7,5 cm, fond $30 - 15 = 15$ cm.
— **Aire maximale** :

$$A(7{,}5) = 7{,}5 \times 15 = 112{,}5 \text{ cm}^2$$

— **Contrôles** : $A(6) = 6 \times 18 = 108$ et $A(9) = 9 \times 12 = 108$ ✓
— **Propriété** : le fond vaut le **double** de la hauteur ✓
— **Comparaison avec une section semi-circulaire** : un demi-cercle de périmètre 30 cm a un rayon $\frac{30}{\pi} \approx 9{,}549$ cm et une aire $\frac{\pi r^2}{2} \approx 143{,}2$ cm² — **nettement mieux** ✓
— **Lecture pratique** : c'est pourquoi les gouttières du commerce sont **arrondies** et non rectangulaires, à quantité de métal égale.

Réponse. Hauteur 7,5 cm (fond 15 cm), aire 112,5 cm².

Correction de l'exercice 12 – Prix optimal

— **Notations** : n le nombre de hausses de 0,50 €.
— **Prix** : $8 + 0{,}5n$; **spectateurs** : $400 - 20n$.
— **Recette** :

$$R(n) = (8 + 0{,}5n)(400 - 20n) = 3200 - 160n + 200n - 10n^2 = 3200 + 40n - 10n^2$$

— **Dérivée** : $R'(n) = 40 - 20n$.
— **Racine** : $n = 2$.
— **Conclusion** : deux hausses, soit un prix de 9 € pour 360 spectateurs.
— **Recette maximale** :

$$R(2) = 9 \times 360 = 3240 \text{ €}$$

— **Contrôles** : $R(0) = 3200$; $R(1) = 8{,}5 \times 380 = 3230$; $R(3) = 9{,}5 \times 340 = 3230$; $R(4) = 10 \times 320 = 3200$ ✓
— **Symétrie** : la recette est symétrique autour de $n = 2$ ✓
— **Gain** : seulement 40 € de plus que le prix actuel, soit +1,25 % — l'optimisation du prix a ici un effet **modeste**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Attention à la variable discrète** : n doit être **entier** ; si l'optimum continu avait été 2,5, il faudrait comparer $R(2)$ et $R(3)$.
— **Baisse de prix** : $n = -2$ donnerait 7 € pour 440 spectateurs, soit 3080 € — moins bon ✓

Réponse. Prix de 9 € pour 360 spectateurs, recette de 3240 €.

Correction de l'exercice 13 – Chemin le plus court

Plutôt que de dériver une somme de deux racines, on utilise une symétrie. Soit $A'(0\,;-3)$ le symétrique de A par rapport à la route. Pour tout point M de la route, $AM = A'M$, donc minimiser $AM + MB$ revient à minimiser $A'M + MB$.

Or $A'M + MB \geq A'B$, avec égalité exactement quand M est sur le segment $[A'B]$: le plus court chemin de A' à B est la ligne droite. La droite $(A'B)$ passe par $(0\,;-3)$ et $(8\,;5)$; sa pente vaut $\dfrac{5-(-3)}{8-0} = 1$, donc son équation est $y = x - 3$. Elle coupe la route $(y = 0)$ en $x = 3$.

$$A'B = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31$$

Contrôle : $AM = 3\sqrt{2}$ et $MB = 5\sqrt{2}$, de somme $8\sqrt{2}$; pour $M(2\,;0)$, on trouverait environ 11,42, davantage. Le point de raccordement est $M(3\,;0)$.

Réponse. $M(3\,;0)$, pour une longueur minimale de $8\sqrt{2} \approx 11{,}31$.

Correction de l'exercice 14 – Cône de volume maximal

— **Volume** :

$$V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^2 (6-h)}{3} = \frac{\pi\left(6h^2 - h^3\right)}{3}$$

— **Domaine** : $0 < h < 6$.
— **Dérivée** :

$$V'(h) = \frac{\pi\left(12h - 3h^2\right)}{3} = \pi h(4-h)$$

— **Racines** : $h = 0$ (exclue) et $h = 4$.
— **Signe** : positive avant 4, négative après — **maximum** ✓
— **Dimensions** : $h = 4$ et $r^2 = 4 \times 2 = 8$, donc $r = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8284$.
— **Volume maximal** :

$$V(4) = \frac{\pi \times 8 \times 4}{3} = \frac{32\pi}{3} \approx 33{,}510$$

— **Contrôles** : $V(3) = \dfrac{\pi \times 9 \times 3}{3} = 9\pi \approx 28{,}274$ et $V(5) = \dfrac{\pi \times 25 \times 1}{3} \approx 26{,}180$ ✓
— **Rapport au volume de la sphère** : $\dfrac{4\pi \times 27}{3} = 36\pi \approx 113{,}10$, donc le cône occupe $\dfrac{32\pi/3}{36\pi} = \dfrac{8}{27} \approx 29{,}6\,\%$ du volume ✓
— **Propriété remarquable** : $h = \dfrac{4R}{3}$ — la hauteur optimale vaut les deux tiers du **diamètre**, et le rapport $\dfrac{8}{27}$ est indépendant du rayon ✓

Réponse. $h = 4$ et $r = 2\sqrt{2}$, pour $V = \dfrac{32\pi}{3} \approx 33{,}51$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Somme de deux carrés

Somme des carrés. On exprime $y = 12 - x$, avec $0 \leq x \leq 12$:

$$S(x) = x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$$

$S'(x) = 4x - 24 = 4(x - 6)$, négative avant 6, positive après : le minimum est $S(6) = 72$, atteint pour $x = y = 6$.

Produit. $P(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$, et $P'(x) = 12 - 2x$, positive avant 6, négative après : le maximum est $P(6) = 36$.

Les deux optimums sont atteints pour les mêmes valeurs, ce qui s’explique par l’identité $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$: avec $x + y = 12$, on a $S = 144 - 2P$, donc minimiser S revient à maximiser P.

Contrôle : $S(4) = 80 > 72$ et $P(4) = 32 < 36$. Pour $x = y = 6$: $S_{\min} = 72$ et $P_{\max} = 36$.

Réponse. $x = y = 6$ dans les deux cas : $S_{\min} = 72$ et $P_{\max} = 36$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : conception d’un réservoir

a) Le volume impose $x^2 h = 32$, donc $h = \dfrac{32}{x^2}$. Sans couvercle, la tôle comprend le fond, d’aire x^2, et quatre parois de x sur h :

$$A(x) = x^2 + 4x \times \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} \qquad (x > 0)$$

b) $A'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = \dfrac{2\left(x^3 - 64\right)}{x^2}$. Le signe est celui de $x^3 - 64$: négatif pour $x < 4$, positif pour $x > 4$, car $4^3 = 64$. L’aire est minimale pour $x = 4$ m, avec $h = \dfrac{32}{16} = 2$ m et $A(4) = 16 + 32 = 48$ m².

c) Un cube de volume 32 m³ a un côté c tel que $c^3 = 32$, soit environ 3,175 m à la calculatrice. Sans couvercle, il demande $5c^2 \approx 50{,}4$ m² de tôle. Le réservoir optimal en économise environ 2,4 m², soit près de 5 % : sans couvercle, il vaut mieux une base large et une hauteur réduite, égale à la moitié du côté.

Contrôle : $A(3) \approx 51{,}7$ et $A(5) = 50{,}6$, supérieurs à 48. Le réservoir optimal mesure 4 **m de côté et** 2 **m de haut**, pour 48 **m²** de tôle.

Réponse. a) $A(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$ · b) $x = 4$ m, $h = 2$ m, aire 48 m² · c) 4,8 % de tôle en moins qu’un cube.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).