

Plaquette 3 – Problèmes d'optimisation : aires, volumes, coûts et distances

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les cinq étapes d'un problème d'optimisation.

1. **Nommer** l'inconnue et faire une figure ou un schéma mental. 2. **Traduire** les contraintes (périmètre fixé, volume imposé, ...) pour éliminer les inconnues superflues. 3. **Exprimer** la quantité à optimiser comme **une** fonction d'**une** variable, et donner son **domaine**. 4. **Dériver**, factoriser, étudier le signe. 5. **Conclure** en revenant à la question posée (dimensions, prix, quantité) et **vérifier** la cohérence.

Formules géométriques utiles.

Objet	Aire / Volume
rectangle $a \times b$	ab , périmètre $2(a + b)$
triangle	$\frac{bh}{2}$
disque de rayon r	πr^2 , périmètre $2\pi r$
cylindre	$V = \pi r^2 h$, aire totale $2\pi r^2 + 2\pi r h$
cône	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
pavé $a \times b \times c$	$V = abc$, aire $2(ab + ac + bc)$

Économie.

— **Coût marginal** : $C'(q)$ — coût de la dernière unité produite.

— **Coût moyen** : $\frac{C(q)}{q}$, minimal là où il **égale** le coût marginal.

— **Bénéfice** : $B(q) = R(q) - C(q)$, maximal là où $R'(q) = C'(q)$.

Distances. Pour minimiser une distance, on minimise son **carré** — c'est équivalent (la racine est croissante) et beaucoup plus simple à dériver.

Vérification finale obligatoire. L'optimum trouvé appartient-il au domaine ? Le signe de la dérivée confirme-t-il bien un maximum (et non un minimum) ?

Correction de l'exercice 1 – Rectangle de périmètre fixé

— **Notations** : côtés x et y , avec $2(x + y) = 40$, donc $y = 20 - x$ et $0 < x < 20$.

— **Aire** :

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

— **Dérivée** : $A'(x) = 20 - 2x = 2(10 - x)$.

— **Signe** : positive avant 10, négative après — **maximum** en $x = 10$ ✓

— **Conclusion** : le rectangle est un **carré** de côté 10 cm, d'aire 100 cm².

— **Contrôles** : $A(8) = 8 \times 12 = 96$ et $A(12) = 12 \times 8 = 96$ — inférieurs à 100 ✓

— **Symétrie** : $A(10 - h) = A(10 + h)$, la fonction est symétrique autour de 10 ✓

- **Résultat général** : à périmètre fixé, le **carré** maximise l'aire parmi les rectangles ; et parmi toutes les figures, c'est le **disque**.
- **Comparaison avec le disque** : un cercle de périmètre 40 cm a un rayon $\frac{40}{2\pi} \approx 6,366$ cm et une aire $\pi r^2 \approx 127,3 \text{ cm}^2$ — bien plus que 100 cm^2 ✓

Réponse. Le carré de côté 10 cm, d'aire 100 cm^2 .

Correction de l'exercice 2 - Enclos contre un mur

- **Notations** : x la largeur (deux côtés), y la longueur le long du mur, avec $2x + y = 60$.
- **Contrainte** : $y = 60 - 2x$ et $0 < x < 30$.
- **Aire** :

$$A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$$

- **Dérivée** : $A'(x) = 60 - 4x = 4(15 - x)$.
- **Maximum** en $x = 15 \text{ m}$, avec $y = 30 \text{ m}$.
- **Aire maximale** :

$$A(15) = 15 \times 30 = 450 \text{ m}^2$$

- **Contrôles** : $A(12) = 12 \times 36 = 432$ et $A(18) = 18 \times 24 = 432$ ✓
- **Propriété** : la longueur est le **double** de la largeur — différent du cas sans mur (où l'on obtenait un carré) ✓
- **Comparaison** : sans mur, 60 m de clôture donneraient un carré de 15 m de côté, d'aire 225 m^2 — **deux fois moins** ✓
- **Généralisation** : avec P mètres de clôture et un mur, l'aire maximale vaut $\frac{P^2}{8}$; ici $\frac{3600}{8} = 450$ ✓

Réponse. $15 \text{ m} \times 30 \text{ m}$, pour 450 m^2 .

Correction de l'exercice 3 - Boîte de volume maximal

- **Dimensions de la boîte** : $(30 - 2x)$, $(18 - 2x)$ et hauteur x , avec $0 < x < 9$.
- **Volume** :

$$V(x) = x(30 - 2x)(18 - 2x) = x(540 - 96x + 4x^2) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$$

- **Dérivée** : $V'(x) = 12x^2 - 192x + 540 = 12(x^2 - 16x + 45)$.
- **Racines** : $\Delta = 256 - 180 = 76$, donc $x = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{2} = 8 \pm \sqrt{19}$.
- **Valeurs** : $\sqrt{19} \approx 4,3589$, donc $x_1 \approx 3,6411$ et $x_2 \approx 12,359$ (hors domaine).
- **Signe sur $]0; 9[$** : positive avant 3,6411, négative après — **maximum** ✓
- **Volume maximal** :

$$V(3,6411) \approx 3,6411 \times 22,718 \times 10,718 \approx 886,6 \text{ cm}^3$$

- **Contrôles** : $V(3) = 3 \times 24 \times 12 = 864$ et $V(4) = 4 \times 22 \times 10 = 880$ — tous deux inférieurs ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $V'(3) = 12(9 - 48 + 45) = 72 > 0$ ✓ et $V'(4) = 12(16 - 64 + 45) = -36 < 0$ ✓
- **Remarque** : l'optimum 3,64 cm n'est pas « rond » — c'est la règle dès que la feuille n'est pas carrée.

Réponse. $x = 8 - \sqrt{19} \approx 3,64 \text{ cm}$, pour $V \approx 886,6 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 4 - Cylindre de volume imposé

— **Contrainte** : $\pi r^2 h = 1000$, donc $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

— **Surface totale** (deux disques et le tube) :

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

— **Dérivée** :

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$$

— **Racine** : $r^3 = \frac{500}{\pi} \approx 159,155$, donc $r \approx 5,4193$ cm.

— **Signe** : négative avant, positive après — **minimum** ✓

— **Hauteur correspondante** : $h = \frac{1000}{\pi \times 29,369} \approx 10,839$ cm.

— **Propriété remarquable** : $h = 2r$ — la boîte optimale est aussi **haute que large** ✓

— **Surface minimale** : $2\pi \times 29,369 + \frac{2000}{5,4193} \approx 184,52 + 369,05 \approx 553,6$ cm².

— **Contrôles** : $S(5) = 157,08 + 400 = 557,08$ et $S(6) = 226,19 + 333,33 = 559,52$ — tous deux supérieurs ✓

— **Comparaison avec les boîtes réelles** : une boîte de conserve de 1 L fait souvent $r \approx 5$ cm et $h \approx 12,7$ cm, un peu plus haute que l'optimum — pour des raisons d'empilement et de préhension, pas de matière.

Réponse. $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$ cm et $h = 2r \approx 10,84$ cm.

Correction de l'exercice 5 - Bénéfice maximal

— **Recette** : $R(q) = q(50 - 0,2q) = 50q - 0,2q^2$.

— **Bénéfice** :

$$B(q) = R(q) - C(q) = 50q - 0,2q^2 - 10q - 500 = -0,2q^2 + 40q - 500$$

— **Dérivée** : $B'(q) = -0,4q + 40$.

— **Racine** : $q = 100$.

— **Signe** : positive avant 100, négative après — **maximum** ✓

— **Bénéfice maximal** :

$$B(100) = -2000 + 4000 - 500 = 1500 \text{ €}$$

— **Prix pratiqué** : $p = 50 - 20 = 30$ €.

— **Contrôles** : $B(90) = -1620 + 3600 - 500 = 1480$ et

$$B(110) = -2420 + 4400 - 500 = 1480 \text{ ✓}$$

— **Règle économique** : au maximum, $R'(q) = C'(q)$, soit $50 - 0,4q = 10$ et $q = 100$ ✓ — la recette marginale égale le coût marginal.

— **Seuil de rentabilité** : $B(q) = 0$ donne $q^2 - 200q + 2500 = 0$, soit $q = 100 \pm \sqrt{7500} \approx 100 \pm 86,603$ — rentable entre 14 et 187 articles ✓

— **Contrôle** : $B(14) = -39,2 + 560 - 500 = 20,8 > 0$ ✓ et

$$B(13) = -33,8 + 520 - 500 = -13,8 < 0 \text{ ✓}$$

Réponse. $q = 100$ articles au prix de 30 €, pour un bénéfice de 1500 €.

Correction de l'exercice 6 - Triangle d'aire maximale

— **Notations** : cathètes x et y avec $x^2 + y^2 = 100$, donc $y = \sqrt{100 - x^2}$ et $0 < x < 10$.

— **Aire** :

$$A(x) = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$$

— **Astuce** : on maximise $A^2 = \frac{x^2(100 - x^2)}{4}$, plus simple à dériver.

— **Posons** $t = x^2$: la fonction $\frac{t(100 - t)}{4}$ est maximale pour $t = 50$ (sommet de la parabole).

— **Conclusion** : $x^2 = 50$, donc $x = 5\sqrt{2} \approx 7,0711$ et $y = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ également.

— **Triangle optimal** : **isocèle rectangle** de cathètes $5\sqrt{2}$ ✓

— **Aire maximale** :

$$A = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

— **Contrôles** : $x = 6$ donne $y = 8$ et $A = 24$ ✓ ; $x = 8$ donne $y = 6$ et $A = 24$ ✓ — tous deux inférieurs à 25.

— **Contrôle de l'hypoténuse** : $50 + 50 = 100$ ✓

— **Résultat général** : à hypoténuse fixée, le triangle rectangle **isocèle** maximise l'aire — les angles valent alors 45° , 45° et 90° .

Réponse. Cathètes $5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm (triangle isocèle), aire 25 cm^2 .

Correction de l'exercice 7 - Distance à une droite

— **Distance au carré** :

$$d(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

— **Dérivée** :

$$d'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

— **Racine positive** : $x = 1$.

— **Signe** : négative sur $]0; 1[$, positive sur $]1; +\infty[$ — **minimum** en $x = 1$ ✓

— **Point** : $(1; 1)$.

— **Distance** :

$$\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

— **Contrôles** : en $x = 0,5$, $d = 0,25 + 4 = 4,25$ et la distance vaut $2,0616$ ✓ ; en $x = 2$, $d = 4 + 0,25 = 4,25$ également ✓

— **Symétrie** : $d\left(\frac{1}{x}\right) = d(x)$ — la courbe est symétrique par rapport à la droite $y = x$, ce qui explique l'égalité ✓

— **Interprétation** : le point le plus proche est sur la **bissectrice** $y = x$, résultat prévisible par symétrie.

— **Inégalité associée** : $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ pour tout $x > 0$, avec égalité en $x = 1$ ✓

Réponse. Le point $(1; 1)$, à la distance $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Correction de l'exercice 8 - Fenêtre en plein cintre

- **Notations** : r le rayon du demi-disque (donc la largeur du rectangle vaut $2r$) et h sa hauteur.
- **Périmètre** : $2r + 2h + \pi r = 8$ (la base, les deux côtés verticaux et le demi-cercle).
- **Contrainte** : $h = \frac{8 - 2r - \pi r}{2}$, avec $0 < r < \frac{8}{2 + \pi}$.

— **Aire** :

$$A(r) = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = r(8 - 2r - \pi r) + \frac{\pi r^2}{2} = 8r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = 8r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

- **Dérivée** : $A'(r) = 8 - 4r - \pi r = 8 - (4 + \pi)r$.

— **Racine** :

$$r = \frac{8}{4 + \pi} \approx 1,1202 \text{ m}$$

- **Hauteur** : $h = \frac{8 - 2 \times 1,1202 - \pi \times 1,1202}{2} \approx \frac{8 - 2,2404 - 3,5190}{2} \approx 1,1202 \text{ m}$.
- **Propriété remarquable** : $h = r$ exactement — la hauteur du rectangle égale le rayon, donc la fenêtre a une largeur double de la hauteur de sa partie rectangulaire ✓
- **Aire maximale** :
 $8 \times 1,1202 - 2 \times 1,2548 - \frac{\pi \times 1,2548}{2} \approx 8,9616 - 2,5096 - 1,9711 \approx 4,4808 \text{ m}^2$.
- **Contrôles** : $A(1) = 8 - 2 - 1,5708 = 4,4292$ et $A(1,25) = 10 - 3,125 - 2,4544 = 4,4206$ — tous deux inférieurs ✓
- **Domaine** : $\frac{8}{2 + \pi} \approx 1,5559$, et $1,1202 < 1,5559$ ✓

Réponse. $r = \frac{8}{4 + \pi} \approx 1,12 \text{ m}$ avec $h = r$; aire $\approx 4,48 \text{ m}^2$.

Correction de l'exercice 9 - Coût de transport

- **Temps pour 100 km** : $\frac{100}{v}$ heures.

— **Consommation aux 100 km** :

$$C(v) = \frac{100}{v} \left(6 + \frac{v^2}{400} \right) = \frac{600}{v} + \frac{v}{4}$$

— **Dérivée** :

$$C'(v) = -\frac{600}{v^2} + \frac{1}{4} = \frac{v^2 - 2400}{4v^2}$$

- **Racine positive** : $v = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6} \approx 48,990 \text{ km/h}$.
- **Signe** : négative avant, positive après — **minimum** ✓
- **Consommation minimale** :

$$C(48,990) = \frac{600}{48,990} + \frac{48,990}{4} \approx 12,247 + 12,247 = 24,495 \text{ L/100 km}$$

- **Propriété** : au minimum, les deux termes sont **égaux** ✓ — conséquence de la forme $\frac{a}{v} + bv$.
- **Contrôles** : $C(40) = 15 + 10 = 25$ et $C(60) = 10 + 15 = 25$ — tous deux supérieurs ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $C'(40) = \frac{1600 - 2400}{6400} = -0,125 < 0$ ✓ et
 $C'(60) = \frac{3600 - 2400}{14400} \approx 0,083 > 0$ ✓

- **Lecture pratique** : rouler plus lentement consomme plus **aux 100 km**, car le moteur tourne plus longtemps pour la même distance. L'optimum est un compromis.
- **Formule générale** : pour $C(v) = \frac{a}{v} + bv$, le minimum est en $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$ avec $C = 2\sqrt{ab}$ — ici $2\sqrt{150} \approx 24,495$ ✓

Réponse. $v = 20\sqrt{6} \approx 49$ km/h, pour $2\sqrt{150} \approx 24,5$ L/100 km.

Correction de l'exercice 10 - Aire d'un trapèze inscrit

- **Paramétrage** : sommets supérieurs $(\pm x; y)$ avec $x^2 + y^2 = 4$, donc $y = \sqrt{4 - x^2}$ et $0 < x < 2$.
- **Aire du trapèze** : bases 4 et $2x$, hauteur y .

$$A(x) = \frac{(4 + 2x)y}{2} = (2 + x)\sqrt{4 - x^2}$$

- **Dérivée** — produit avec $u = 2 + x$ et $v = \sqrt{4 - x^2}$, $v' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$:

$$A'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x(2 + x)}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

- **Numérateur** : $-2(x^2 + x - 2) = -2(x + 2)(x - 1)$.
- **Racine dans le domaine** : $x = 1$.
- **Signe** : positive avant 1, négative après — **maximum** ✓
- **Dimensions** : $x = 1$, donc $y = \sqrt{3} \approx 1,7321$; la petite base vaut 2.
- **Aire maximale** :

$$A(1) = 3\sqrt{3} \approx 5,1962$$

- **Contrôles** : $A(0,8) = 2,8 \times \sqrt{3,36} \approx 2,8 \times 1,8330 \approx 5,1323$ ✓ et $A(1,2) = 3,2 \times \sqrt{2,56} = 3,2 \times 1,6 = 5,12$ ✓
- **Remarque** : le trapèze optimal a ses côtés obliques de longueur $\sqrt{1 + 3} = 2$ — égale au rayon ! Les trois côtés non horizontaux valent donc 2 ✓

Réponse. $x = 1$ (petite base 2, hauteur $\sqrt{3}$), aire maximale $3\sqrt{3} \approx 5,20$.

Correction de l'exercice 11 - Pliage d'une gouttière

- **Notations** : hauteur x des deux rebords, largeur du fond $30 - 2x$, avec $0 < x < 15$.
- **Aire de la section** :

$$A(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$$

- **Dérivée** : $A'(x) = 30 - 4x$.
- **Racine** : $x = 7,5$ cm.
- **Signe** : positive avant, négative après — **maximum** ✓
- **Dimensions** : hauteur 7,5 cm, fond $30 - 15 = 15$ cm.
- **Aire maximale** :

$$A(7,5) = 7,5 \times 15 = 112,5 \text{ cm}^2$$

- **Contrôles** : $A(6) = 6 \times 18 = 108$ et $A(9) = 9 \times 12 = 108$ ✓
- **Propriété** : le fond vaut le **double** de la hauteur ✓
- **Comparaison avec une section semi-circulaire** : un demi-cercle de périmètre 30 cm a un rayon $\frac{30}{\pi} \approx 9,549$ cm et une aire $\frac{\pi r^2}{2} \approx 143,2 \text{ cm}^2$ — **nettement mieux** ✓

- **Lecture pratique** : c'est pourquoi les gouttières du commerce sont **arrondies** et non rectangulaires, à quantité de métal égale.

Réponse. Hauteur 7,5 cm (fond 15 cm), aire 112,5 cm².

Correction de l'exercice 12 - Prix optimal

- **Notations** : n le nombre de hausses de 0,50 €.
- **Prix** : $8 + 0,5n$; **spectateurs** : $400 - 20n$.
- **Recette** :

$$R(n) = (8 + 0,5n)(400 - 20n) = 3200 - 160n + 200n - 10n^2 = 3200 + 40n - 10n^2$$
- **Dérivée** : $R'(n) = 40 - 20n$.
- **Racine** : $n = 2$.
- **Conclusion** : deux hausses, soit un prix de 9 € pour 360 spectateurs.
- **Recette maximale** :

$$R(2) = 9 \times 360 = 3240 \text{ €}$$
- **Contrôles** : $R(0) = 3200$; $R(1) = 8,5 \times 380 = 3230$; $R(3) = 9,5 \times 340 = 3230$;
 $R(4) = 10 \times 320 = 3200$ ✓
- **Symétrie** : la recette est symétrique autour de $n = 2$ ✓
- **Gain** : seulement 40 € de plus que le prix actuel, soit +1,25 % — l'optimisation du prix a ici un effet **modeste**.
- **Attention à la variable discrète** : n doit être **entier** ; si l'optimum continu avait été 2,5, il faudrait comparer $R(2)$ et $R(3)$.
- **Baisse de prix** : $n = -2$ donnerait 7 € pour 440 spectateurs, soit 3080 € — moins bon ✓

Réponse. Prix de 9 € pour 360 spectateurs, recette de 3240 €.

Correction de l'exercice 13 - Chemin le plus court

- **Astuce de la symétrie** : on remplace $A(0; 3)$ par son symétrique $A'(0; -3)$ par rapport à la route.
- **Justification** : $AM = A'M$ pour tout point M de l'axe, donc minimiser $AM + MB$ revient à minimiser $A'M + MB$ ✓
- **Minimum** : $A'M + MB \geq A'B$, avec égalité si M est sur le **segment** $[A'B]$.
- **Droite** $(A'B)$: de $(0; -3)$ à $(8; 5)$, de pente $\frac{8}{8} = 1$, donc $y = x - 3$.
- **Intersection avec l'axe** : $x = 3$.

$$M(3; 0)$$

- **Distance minimale** : $A'B = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2} \approx 11,314$.
- **Contrôle** : $AM = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \approx 4,2426$ et $MB = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \approx 7,0711$, de somme $8\sqrt{2}$ ✓
- **Contrôles comparatifs** : pour $M(2; 0)$,
 $AM + MB = \sqrt{13} + \sqrt{61} \approx 3,6056 + 7,8102 = 11,416 > 11,314$ ✓
- Pour $M(4; 0)$, $5 + \sqrt{41} \approx 5 + 6,4031 = 11,403$ ✓
- **Loi de la réflexion** : les angles d'incidence et de réflexion sont égaux — c'est le principe de Fermat, qui régit aussi la réflexion de la lumière ✓
- **Contrôle des pentes** : $\overline{MA}(-3; 3)$ et $\overline{MB}(5; 5)$ font bien des angles de 45° avec la route ✓

Réponse. $M(3; 0)$, pour une longueur minimale de $8\sqrt{2} \approx 11,31$.

Correction de l'exercice 14 - Cône de volume maximal

— **Volume** :

$$V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^2(6-h)}{3} = \frac{\pi(6h^2 - h^3)}{3}$$

— **Domaine** : $0 < h < 6$.

— **Dérivée** :

$$V'(h) = \frac{\pi(12h - 3h^2)}{3} = \pi h(4 - h)$$

— **Racines** : $h = 0$ (exclue) et $h = 4$.

— **Signe** : positive avant 4, négative après — **maximum** ✓

— **Dimensions** : $h = 4$ et $r^2 = 4 \times 2 = 8$, donc $r = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$.

— **Volume maximal** :

$$V(4) = \frac{\pi \times 8 \times 4}{3} = \frac{32\pi}{3} \approx 33,510$$

— **Contrôles** : $V(3) = \frac{\pi \times 9 \times 3}{3} = 9\pi \approx 28,274$ et $V(5) = \frac{\pi \times 25 \times 1}{3} \approx 26,180$ ✓

— **Rapport au volume de la sphère** : $\frac{4\pi \times 27}{3} = 36\pi \approx 113,10$, donc le cône occupe $\frac{32\pi/3}{36\pi} = \frac{8}{27} \approx 29,6\%$ du volume ✓

— **Propriété remarquable** : $h = \frac{4R}{3}$ — la hauteur optimale vaut les deux tiers du diamètre, et le rapport $\frac{8}{27}$ est indépendant du rayon ✓

Réponse. $h = 4$ et $r = 2\sqrt{2}$, pour $V = \frac{32\pi}{3} \approx 33,51$.

Correction de l'exercice 15 - Somme de deux carrés

Somme des carrés. Avec $y = 12 - x$ et $0 \leq x \leq 12$:

$$S(x) = x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$$

— **Dérivée** : $S'(x) = 4x - 24 = 4(x - 6)$.

— **Minimum** en $x = 6$, avec $S(6) = 36 + 36 = 72$ ✓

— **Contrôles** : $S(0) = 144$; $S(4) = 16 + 64 = 80$; $S(12) = 144$ — le minimum est bien au centre ✓

Produit. $P(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$.

— **Dérivée** : $P'(x) = 12 - 2x$, nulle en $x = 6$.

— **Maximum** : $P(6) = 36$ ✓

— **Contrôles** : $P(4) = 32$; $P(8) = 32$ ✓

Observation. Les deux optimums sont atteints pour **les mêmes** valeurs, $x = y = 6$.

— **Explication** : $S = (x + y)^2 - 2xy = 144 - 2P$ — minimiser S revient exactement à maximiser P ✓

— **Contrôle** : $144 - 2 \times 36 = 72$ ✓

— **Encadrements** : $72 \leq S \leq 144$ et $0 \leq P \leq 36$, les extrémités correspondant respectivement à $x = y = 6$ et à $x \in \{0; 12\}$.

— **Inégalité classique** : $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$, avec égalité si et seulement si $x = y$ ✓

Réponse. $x = y = 6$ dans les deux cas : $S_{\min} = 72$ et $P_{\max} = 36$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : conception d'un réservoir

a) **Contrainte** : $x^2 h = 32$, donc $h = \frac{32}{x^2}$.

— **Aire** : le fond (x^2) et quatre parois ($4xh$).

$$A(x) = x^2 + 4x \times \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} \quad \text{pour } x > 0$$

b) **Dérivée** :

$$A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2}$$

— **Racine** : $x^3 = 64$, donc $x = 4$ m.

— **Signe** : négative avant 4, positive après — **minimum** ✓

— **Hauteur** : $h = \frac{32}{16} = 2$ m.

— **Propriété** : $h = \frac{x}{2}$ — la hauteur vaut la **moitié** du côté ✓

— **Aire minimale** :

$$A(4) = 16 + 32 = 48 \text{ m}^2$$

— **Contrôles** : $A(3) = 9 + 42,667 = 51,667$ et $A(5) = 25 + 25,6 = 50,6$ — tous deux supérieurs ✓

c) **Comparaison avec un cube.** Un cube de volume 32 m^3 a pour côté $32^{1/3} \approx 3,1748$ m.

— **Aire sans couvercle** : $5c^2 \approx 5 \times 10,079 \approx 50,397 \text{ m}^2$.

— **Conclusion** : le réservoir optimal (48 m^2) économise environ $2,4 \text{ m}^2$ de tôle, soit $4,8 \%$ ✓

— **Explication** : sans couvercle, il est avantageux d'**élargir** la base (moins chère en tôle par unité de volume) et de réduire la hauteur — d'où $h = \frac{x}{2}$ au lieu de $h = x$.

— **Avec couvercle en revanche** : $A(x) = 2x^2 + \frac{128}{x}$, minimale pour $x^3 = 32$, soit $x = 32^{1/3} \approx 3,1748$ — le **cube** redevient optimal, comme attendu par symétrie ✓

Réponse. a) $A(x) = x^2 + \frac{128}{x}$ · b) $x = 4$ m, $h = 2$ m, aire 48 m^2 · c) $4,8 \%$ de tôle en moins qu'un cube.