Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : études complètes et modélisation

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Plan d'une étude complète.

1. **Domaine** de définition et de dérivabilité. 2. **Parité** ou périodicité éventuelle (pour réduire l'étude). 3. **Dérivée**, factorisée. 4. **Signe** de la dérivée et tableau de variations. 5. **Extremums** (locaux et globaux) et valeurs aux bornes. 6. **Tangentes** remarquables. 7. **Position relative** par rapport à une droite ou une autre courbe.

Outils de calcul.

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (u^n)' = nu'u^{n-1} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Position relative de C_f et d'une droite $d : y = ax + b$: on étudie le **signe** de $f(x) - (ax + b)$.

— Une **racine double** en x_0 signale une **tangence** en ce point.

— Une **racine simple** signale une **traversée**.

Tangente au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Symétries.

— f **paire** ($f(-x) = f(x)$) : courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; f' est **impaire**.

— f **impaire** ($f(-x) = -f(x)$) : courbe symétrique par rapport à l'origine ; f' est **paire**.

Contrôles systématiques à faire. Vérifier chaque extremum par une valeur voisine · contrôler une factorisation par développement · vérifier qu'un optimum appartient au domaine · comparer l'ordre de grandeur au bon sens du problème.

Correction de l'exercice 1 – Étude complète d'une cubique

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$, positive à l'extérieur des racines et négative entre elles. La fonction croît sur $]-\infty ; 1]$, décroît sur $[1 ; 3]$, puis croît, avec un maximum local $f(1) = 0$ et un minimum local $f(3) = 27 - 54 + 27 - 4 = -4$.

b) $f(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$: 1 est racine. Comme $f'(1) = 0$ aussi, la courbe touche l'axe en ce point sans le traverser : 1 est une racine **double**. On vérifie en développant :

$$(x - 1)^2(x - 4) = \left(x^2 - 2x + 1\right)(x - 4) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

c) Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est : les racines sont 1, racine double, et 4, soit **deux** racines distinctes. Le maximum local vaut exactement 0, ce qui confirme que la courbe ne fait que toucher l'axe en $x = 1$.

Contrôle : $f(2) = -2 < 0$ et $f(5) = 16 > 0$. Réponses : maximum 0 en 1, minimum -4 en 3 ; $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$; deux racines.

Réponse. a) max 0 en 1, min -4 en 3 · b) $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$ · c) deux racines, 1 (double) et 4.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Position relative courbe-droite

On étudie le signe de la différence entre la fonction et la droite, en réduisant au même dénominateur :

$$f(x) - x = \frac{x^2+2}{x} - x = \frac{x^2+2-x^2}{x} = \frac{2}{x}$$

Sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{2}{x} > 0$: la courbe est **toujours au-dessus** de la droite $y = x$, et elles n'ont aucun point commun. L'écart $\frac{2}{x}$ devient de plus en plus petit quand x grandit : il vaut 2 en $x = 1$, 0,2 en $x = 10$ et 0,02 en $x = 100$. La courbe se rapproche donc de la droite sans jamais la rejoindre.

On peut compléter par les variations : $f(x) = x + \frac{2}{x}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$, négative avant $\sqrt{2}$ et positive après. Le minimum vaut $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

Contrôle : $f(1) = 3 > 1$ et $f(2) = 3 > 2$. La courbe est au-dessus de la droite sur $]0\,;+\infty[$.

Réponse. $f(x) - x = \frac{2}{x} > 0$: la courbe est toujours au-dessus, avec $y = x$ pour asymptote.

Correction de l'exercice 3 – Modèle de refroidissement

On dérive $T(t) = 20 + \frac{60}{1+0{,}5t}$ en utilisant la dérivée de $\frac{1}{v}$, qui vaut $-\frac{v'}{v^2}$, avec $v = 1 + 0{,}5t$ et $v' = 0{,}5$:

$$T'(t) = 60 \times \left(-\frac{0{,}5}{(1+0{,}5t)^2}\right) = -\frac{30}{(1+0{,}5t)^2}$$

Cette dérivée est toujours strictement négative : la température **décroît** constamment. Elle part de $T(0) = 80$ °C et se rapproche de 20 °C, la température ambiante, sans l'atteindre.

On résout $T(t) < 30$: $\frac{60}{1+0{,}5t} < 10$. Le dénominateur est positif, donc cela équivaut à $60 < 10(1+0{,}5t)$, soit $1 + 0{,}5t > 6$, d'où $t > 10$.

Le refroidissement ralentit : $T'(0) = -30$ °C par minute au départ, mais $T'(10) \approx -0{,}83$ °C par minute. **Contrôle** : $T(10) = 20 + 10 = 30$ °C. La température passe sous 30 °C **après** 10 **minutes**.

Réponse. T décroît de 80 °C vers 20 °C ; $T < 30$ °C après 10 minutes.

Correction de l'exercice 4 – Étude avec racine carrée

On dérive un produit avec $u = x$ et $v = \sqrt{4-x}$. La dérivée de $\sqrt{4-x}$ s'obtient avec la règle $(g(ax+b))' = a\,g'(ax+b)$: $v' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$. Pour $0 \le x < 4$:

$$f'(x) = \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$$

Le dénominateur est positif : $f'(x)$ a le signe de $8 - 3x$, positif avant $\frac{8}{3}$ et négatif après. La fonction croît puis décroît, et son maximum est

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \approx 3{,}08$$

Contrôle : $f(2) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ et $f(3) = 3$, inférieurs ; aux bornes, $f(0) = f(4) = 0$. Le maximum vaut $\frac{16}{3\sqrt{3}} \approx 3{,}08$, atteint en $x = \frac{8}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Maximum $\dfrac{16}{3\sqrt{3}} = \dfrac{16\sqrt{3}}{9} \approx 3{,}08$ en $x = \dfrac{8}{3}$.

Correction de l'exercice 5 – Trajectoire optimale

Hauteur maximale. $y' = 1 - \dfrac{x}{20}$, positive pour $x < 20$ et négative ensuite : la hauteur est maximale en $x = 20$ m.

$$y(20) = 20 - \frac{400}{40} = 10 \text{ m}$$

Portée. Le projectile retombe quand $y = 0$: $x\left(1 - \dfrac{x}{40}\right) = 0$, donc $x = 0$ (le départ) ou $x = 40$ m. Le sommet est au milieu de la portée, ce qui traduit la symétrie de la parabole.

Angle de départ. La pente de la tangente au départ vaut $y'(0) = 1$: la tangente monte d'autant qu'elle avance, elle fait donc un angle de 45° avec l'horizontale. À l'arrivée, $y'(40) = -1$: le projectile retombe avec le même angle.

Contrôle : $y(10) = y(30) = 7{,}5$ m, conformément à la symétrie. Réponses : hauteur maximale 10 **m**, portée 40 **m**, angle de départ 45°.

Réponse. Hauteur maximale 10 m à $x = 20$ m, portée 40 m, angle de départ 45°.

Correction de l'exercice 6 – Fonction à deux paramètres

Il faut deux conditions, puisqu'il y a deux inconnues. La courbe passe par $(1\,;1)$ si $f(1) = 1$, soit $\dfrac{a+b}{2} = 1$, c'est-à-dire $a + b = 2$. La tangente y est horizontale si $f'(1) = 0$. On dérive le quotient :

$$f'(x) = \frac{a\left(x^2+1\right) - (ax+b)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{\left(x^2+1\right)^2}$$

En $x = 1$, le numérateur vaut $-a - 2b + a = -2b$: il est nul si $b = 0$, et alors $a = 2$. Donc $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

On vérifie : $f'(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ passe du signe + au signe − en $x = 1$, qui est donc un **maximum**, de valeur $f(1) = 1$; en $x = -1$, on trouve un minimum, $f(-1) = -1$.

Contrôle : $f(2) = f(0{,}5) = 0{,}8 < 1$. Il faut $a = 2$ et $b = 0$.

Réponse. $a = 2$ et $b = 0$; $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, maximum 1 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 7 – Intensité lumineuse

— **Domaine** : $0 < x < 10$.

— **Dérivée** :

$$E'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{16}{(10-x)^3}$$

— **Annulation** : $\dfrac{16}{(10-x)^3} = \dfrac{2}{x^3}$, soit $16x^3 = 2(10-x)^3$ et $8x^3 = (10-x)^3$.

— **Racine cubique** : $2x = 10 - x$, donc $3x = 10$ et

$$x = \frac{10}{3} \approx 3{,}3333$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Signe** : E' est négative avant (le terme en $-\frac{2}{x^3}$ domine) et positive après — **minimum** ✓

— **Éclairement minimal.** Les deux distances sont $\frac{10}{3}$ et $10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$.

— **Premier terme** : $\frac{1}{(10/3)^2} = \frac{9}{100} = 0{,}09$.

— **Second terme** : $\frac{8}{(20/3)^2} = \frac{8 \times 9}{400} = \frac{72}{400} = 0{,}18$.

$$E\left(\frac{10}{3}\right) = 0{,}09 + 0{,}18 = 0{,}27$$

— **Contrôles** : $E(3) = \frac{1}{9} + \frac{8}{49} \approx 0{,}1111 + 0{,}1633 = 0{,}2744$ ✓ et $E(4) = \frac{1}{16} + \frac{8}{36} \approx 0{,}0625 + 0{,}2222 = 0{,}2847$ ✓ — tous deux supérieurs à 0,27.

— **Interprétation physique** : le point le moins éclairé est plus proche de la lampe **faible**, au tiers de la distance — cohérent avec l'intuition ✓

— **Règle** : le point critique est tel que $\frac{d_A}{d_B} = \left(\frac{I_A}{I_B}\right)^{1/3}$; ici $\frac{10/3}{20/3} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}$ ✓

Réponse. $x = \frac{10}{3}$, avec un éclairement minimal de 0,27.

Correction de l'exercice 8 – Aire sous une tangente

— **Tangente** : $f(a) = \frac{1}{a}$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$, donc

$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

— **Intersection avec** (Oy) : $x = 0$ donne $y = \frac{2}{a}$, donc $Q\left(0\,;\frac{2}{a}\right)$.

— **Intersection avec** (Ox) : $y = 0$ donne $\frac{x}{a^2} = \frac{2}{a}$, soit $x = 2a$ et $P(2a\,;0)$.

— **Aire du triangle rectangle** :

$$A = \frac{OP \times OQ}{2} = \frac{2a \times \frac{2}{a}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

— **Conclusion** : l'aire vaut **toujours** 2, indépendamment de a ✓

— **Contrôles** : pour $a = 1$, la tangente est $y = -x + 2$, avec $P(2\,;0)$ et $Q(0\,;2)$, d'aire $\frac{2 \times 2}{2} = 2$ ✓

— Pour $a = 4$, la tangente est $y = -\frac{x}{16} + \frac{1}{2}$, avec $P(8\,;0)$ et $Q(0\,;0{,}5)$, d'aire $\frac{8 \times 0{,}5}{2} = 2$ ✓

— **Propriété du point de contact** : $A\left(a\,;\frac{1}{a}\right)$ est le **milieu** de $[PQ]$, car $\frac{0 + 2a}{2} = a$ ✓ et $\frac{2/a + 0}{2} = \frac{1}{a}$ ✓

— **Lecture géométrique** : cette propriété caractérise l'hyperbole $xy = 1$ — toutes ses tangentes découpent des triangles d'aire égale.

— **Généralisation** : pour $y = \frac{k}{x}$, l'aire vaut $2k$.

Réponse. $P(2a\,;0)$ et $Q\left(0\,;\frac{2}{a}\right)$ donnent une aire constante égale à 2.

Correction de l'exercice 9 – Concentration d'un médicament

On dérive le quotient avec $u = 4t$ et $v = t^2 + 4$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$C'(t) = \frac{4\left(t^2+4\right) - 4t \times 2t}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{4\left(4-t^2\right)}{\left(t^2+4\right)^2}$$

Pour $t \geq 0$, le signe est celui de $4 - t^2 = (2-t)(2+t)$, positif avant 2 et négatif après. La concentration augmente pendant 2 heures, puis diminue : le pic est atteint à $t = 2$ h et vaut $C(2) = \frac{8}{8} = 1$ mg/L.

Pour aller plus loin, la concentration dépasse 0,5 mg/L quand $\frac{4t}{t^2+4} > 0{,}5$, soit $t^2 - 8t + 4 < 0$. Ce trinôme a pour racines $4 \pm 2\sqrt{3}$: le médicament est efficace entre environ 0,54 h et 7,46 h, soit pendant environ 6,9 h.

Contrôle : $C(1) = C(4) = 0{,}8$ et $C(3) \approx 0{,}92$, inférieurs à 1. Le pic vaut 1 **mg/L**, atteint au bout de 2 **heures**.

Réponse. Pic de 1 mg/L à $t = 2$ h ; efficacité (> 0,5) pendant environ 6,93 h.

Correction de l'exercice 10 – Deux tangentes perpendiculaires

— **Pentes** : en $x = a$, la tangente a pour pente $2a$; en $x = b$, elle a pour pente $2b$.
— **Perpendicularité** : $2a \times 2b = -1$, donc

$$ab = -\frac{1}{4}$$

— **Exemple** : $a = 1$ et $b = -\frac{1}{4}$.
— **Tangentes** : $y = 2x - 1$ (en $a = 1$) et $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ (en $b = -0{,}25$).
— **Contrôle de la seconde** : $f(-0{,}25) = 0{,}0625$ et $y = -0{,}5(x + 0{,}25) + 0{,}0625 = -0{,}5x - 0{,}0625$ ✓
— **Intersection** : $2x - 1 = -0{,}5x - 0{,}0625$ donne $2{,}5x = 0{,}9375$, soit $x = 0{,}375$.
— **Ordonnée** : $y = 2 \times 0{,}375 - 1 = -0{,}25$.

$$I(0{,}375\,;-0{,}25)$$

— **Propriété remarquable** : l'ordonnée vaut $-\frac{1}{4}$, **quelle que soit** la paire choisie !
— **Démonstration** : les tangentes $y = 2ax - a^2$ et $y = 2bx - b^2$ se coupent en $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = ab = -\frac{1}{4}$ ✓
— **Contrôle avec une autre paire** : $a = 2$ et $b = -\frac{1}{8}$ donnent $x = \frac{2 - 0{,}125}{2} = 0{,}9375$ et $y = -0{,}25$ ✓
— **Conclusion géométrique** : le lieu de ces points d'intersection est la droite $y = -\frac{1}{4}$ — c'est la **directrice** de la parabole ✓

Réponse. Il faut $ab = -\frac{1}{4}$; les tangentes se coupent toujours sur la directrice $y = -\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 11 – Étude d'une fonction paire

Parité. $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$: la fonction est **paire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Variations. On dérive et on factorise :

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

Un tableau de signes des trois facteurs donne $f' < 0$ sur $]-\infty\,;-1[$, $f' > 0$ sur $]-1\,;0[$, $f' < 0$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sur $]0\,;1[$ et $f' > 0$ sur $]1\,;+\infty[$. La fonction décroît, croît, décroît puis croît.

Extremums. $f(\pm 1) = 1 - 2 + 1 = 0$ et $f(0) = 1$: deux minimums 0 en ± 1 et un maximum local 1 en 0. L'identité remarquable $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^2$ le confirme : f est un carré, donc positive ou nulle, et nulle seulement en ± 1.

Contrôle : $f(1{,}5) = 1{,}25^2 = 1{,}5625$ et $f(2) = 9$. Réponses : fonction paire ; minimums 0 en ± 1 ; maximum local 1 en 0.

Réponse. Paire ; $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^2$; minimums 0 en ± 1, maximum local 1 en 0.

Correction de l'exercice 12 – Prix et demande

Le bénéfice est la marge par unité, $p - 15$, multipliée par la quantité vendue, $200 - 4p$. Il faut $q \geq 0$, donc $p \leq 50$, et l'on étudie $15 \leq p \leq 50$:

$$B(p) = (p - 15)(200 - 4p) = -4p^2 + 260p - 3000$$

$B'(p) = -8p + 260$ s'annule en $p = 32{,}5$, positive avant et négative après : le bénéfice est **maximal** pour un prix de 32,50 €.

La quantité vendue est alors $q = 200 - 130 = 70$ unités, et le bénéfice vaut $70 \times 17{,}50 = 1225$ €. Le prix optimal est le milieu de 15 et 50, valeurs pour lesquelles le bénéfice est nul : c'est le sommet de la parabole.

Contrôle : $B(30) = B(35) = 1200$ € ; un écart de 2,50 € sur le prix ne fait perdre que 25 €. Le prix optimal est 32,50 **€**, pour 70 **unités** et 1225 **€** de bénéfice.

Réponse. Prix de 32,50 € pour 70 unités, bénéfice de 1225 €.

Correction de l'exercice 13 – Fonction définie par un quotient de degrés 2

Le dénominateur $x^2 + 1$ ne s'annule jamais : f est définie sur $\mathbb{R}$, et elle est paire. On dérive le quotient :

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \times 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

$f'(x)$ a le signe de x : f décroît sur $]-\infty\,;0]$ et croît sur $[0\,;+\infty[$. Son minimum est $f(0) = -1$.

Pour trouver les valeurs prises, on réécrit $f(x) = \dfrac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$. Comme $x^2 + 1 \geq 1$, le terme retranché est compris entre 0 (exclu) et 2 :

$$-1 \leq f(x) < 1$$

La valeur 1 n'est jamais atteinte, car $f(x) = 1$ donnerait $x^2 - 1 = x^2 + 1$. Quand x grandit, $f(x)$ s'en approche : $f(10) \approx 0{,}98$. L'ensemble des valeurs prises est $[-1\,;1[$.

Réponse. Décroissante puis croissante ; minimum -1 en 0 ; image $[-1\,;1[$.

Correction de l'exercice 14 – Optimisation avec contrainte de coût

— **Notations** : x la longueur du côté avant, y la profondeur.
— **Coût** : $10x$ (avant) + $5x$ (arrière) + $2 \times 5y$ (côtés) $= 15x + 10y = 600$.
— **Contrainte** : $y = 60 - 1{,}5x$, avec $0 < x < 40$.
— **Aire** :

$$A(x) = x(60 - 1{,}5x) = 60x - 1{,}5x^2$$

— **Dérivée** : $A'(x) = 60 - 3x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Racine** : $x = 20$ m, donc $y = 60 - 30 = 30$ m.
— **Aire maximale** :

$$A(20) = 20 \times 30 = 600 \text{ m}^2$$

— **Contrôle du budget** : $15 \times 20 + 10 \times 30 = 300 + 300 = 600$ € ✓
— **Propriété remarquable** : le budget se répartit **exactement en deux moitiés** entre les côtés avant-arrière et les côtés latéraux ✓
— **Contrôles** : $A(16) = 16 \times 36 = 576$ et $A(24) = 24 \times 24 = 576$ ✓
— **Comparaison avec un coût uniforme** : à 5 €/m partout, 600 € achèteraient 120 m de clôture, soit un carré de 30 m de côté et 900 m² — nettement plus ✓
— **Leçon** : la contrainte de coût **asymétrique** déforme l'optimum, qui n'est plus un carré mais un rectangle plus **profond** que large.

Réponse. 20 m (avant) × 30 m (profondeur), pour 600 m².

Correction de l'exercice 15 – Une tangente qui traverse la courbe

On calcule $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et, avec $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, $f'(1) = -1$. La tangente a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$:

$$y = -(x - 1) + 0 = -x + 1$$

Pour la position relative, on étudie le signe de la différence :

$$f(x) - (-x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

d'après l'identité $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, que l'on vérifie en développant. Un cube a le signe de ce qui est élevé au cube : la courbe est **en dessous** de la tangente pour $x < 1$ et **au-dessus** pour $x > 1$.

La tangente **traverse** donc la courbe au point $(1\,;0)$, ce qui est inhabituel. **Contrôle** : en $x = 0$, la courbe vaut 0 et la tangente 1 ; en $x = 2$, la courbe vaut 0 et la tangente -1. Réponse : tangente $y = -x + 1$, traversant la courbe en $(1\,;0)$.

Réponse. $y = -x + 1$; $f(x) - y = (x - 1)^3$: la tangente traverse la courbe en $(1\,;0)$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : étude et optimisation combinées

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Sur $]-1\,;+\infty[$, $x + 2 > 0$ et $(x + 1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de x : f décroît sur $]-1\,;0]$ et croît sur $[0\,;+\infty[$, avec un minimum $f(0) = 0$.

b) $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(1) = \dfrac{1 \times 3}{4} = 0{,}75$, d'où la tangente $y = 0{,}75(x - 1) + 0{,}5 = 0{,}75x - 0{,}25$.

c) Le rectangle a pour côtés x et $f(x)$, donc pour périmètre

$$P(x) = 2\left(x + \frac{x^2}{x+1}\right)$$

et $P'(x) = 2(1 + f'(x))$. Pour $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc $P'(x) > 0$: le périmètre est **strictement croissant**. Plus x est petit, plus le périmètre est petit, mais x ne peut pas valoir 0 : il n'y a **pas de minimum**.

Leçon : un problème d'optimisation n'a pas toujours de solution ; on vérifie que la dérivée change de signe avant de conclure. **Contrôle** : $P(0{,}5) \approx 1{,}33$, $P(1) = 3$, $P(2) \approx 6{,}67$.

Réponse. a) min 0 en $x = 0$ · b) $y = 0{,}75x - 0{,}25$ · c) P strictement croissante : pas de minimum atteint.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).