

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : études complètes et modélisation

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Plan d'une étude complète.

1. **Domaine** de définition et de dérivabilité. 2. **Parité** ou périodicité éventuelle (pour réduire l'étude). 3. **Dérivée**, factorisée. 4. **Signe** de la dérivée et tableau de variations. 5. **Extremums** (locaux et globaux) et valeurs aux bornes. 6. **Tangentes** remarquables. 7. **Position relative** par rapport à une droite ou une autre courbe.

Outils de calcul.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Position relative de C_f et d'une droite $d: y = ax + b$: on étudie le **signe** de $f(x) - (ax + b)$.

- Une **racine double** en x_0 signale une **tangence** en ce point.
- Une **racine simple** signale une **traversée**.

Tangente au point d'abscisse a :

$$y = f(a)(x - a) + f(a)$$

Symétries.

- **f paire** ($f(-x) = f(x)$) : courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; f est **impaire**.
- **f impaire** ($f(-x) = -f(x)$) : courbe symétrique par rapport à l'origine ; f est **paire**.

Contrôles systématiques à faire. Vérifier chaque extremum par une valeur voisine
 · contrôler une factorisation par développement · vérifier qu'un optimum appartient au domaine · comparer l'ordre de grandeur au bon sens du problème.

Correction de l'exercice 1 - Étude complète d'une cubique

a) **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$.

- **Variations** : croissante sur $] -\infty ; 1]$, décroissante sur $[1 ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$.
- **Valeurs** : $f(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 - 4 = -4$.
- **Extremums** : maximum local 0 en $x = 1$, minimum local -4 en $x = 3$.

b) **Racine** : $f(1) = 0$ ✓ — et c'est **aussi** un extremum, donc une racine **double**.

- **Factorisation** : $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$.
- **Contrôle par développement** :
 $(x^2 - 2x + 1)(x - 4) = x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x + x - 4 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ ✓

c) **Racines** : $x = 1$ (double) et $x = 4$ — **deux** valeurs distinctes.

- **Cohérence avec le tableau** : le maximum local vaut exactement 0, donc la courbe **touche** l'axe des abscisses en $x = 1$ sans le traverser ✓
- **Contrôles** : $f(0) = -4 < 0$ ✓ ; $f(2) = 8 - 24 + 18 - 4 = -2 < 0$ ✓ ;
 $f(4) = 64 - 96 + 36 - 4 = 0$ ✓ ; $f(5) = 125 - 150 + 45 - 4 = 16 > 0$ ✓

- **Signe de f** : négative sur $] - \infty ; 4[$ sauf en $x = 1$ où elle est nulle, positive sur $]4 ; +\infty[$ ✓
- **Conséquence** : une racine double se reconnaît au fait qu'elle est **aussi** racine de la dérivée. Ici $f(1) = 0$ ✓

Réponse. a) max 0 en 1, min -4 en 3 · b) $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$ · c) deux racines, 1 (double) et 4.

Correction de l'exercice 2 - Position relative courbe-droite

- **Différence** :

$$f(x) - x = \frac{x^2 + 2}{x} - x = \frac{x^2 + 2 - x^2}{x} = \frac{2}{x}$$

- **Signe** : $\frac{2}{x} > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.
- **Conclusion** : la courbe est **toujours au-dessus** de la droite ✓
- **Comportement asymptotique** : $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ — la droite $y = x$ est **asymptote oblique** ✓
- **Écart** : il vaut 2 en $x = 1$, 0,2 en $x = 10$, 0,02 en $x = 100$ ✓
- **Aucun point commun** : la différence ne s'annule jamais ✓
- **Variations de f** : $f(x) = x + \frac{2}{x}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$, nulle en $x = \sqrt{2}$.
- **Minimum** : $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$ ✓
- **Contrôles** : $f(1) = 3$ et $f(2) = 3$ — tous deux supérieurs à 2,8284 ✓
- **Sur $] - \infty ; 0[$** : $\frac{2}{x} < 0$, la courbe serait **en dessous** de la droite, avec un maximum $-2\sqrt{2}$ en $x = -\sqrt{2}$ (par imparité) ✓

Réponse. $f(x) - x = \frac{2}{x} > 0$: la courbe est toujours au-dessus, avec $y = x$ pour asymptote.

Correction de l'exercice 3 - Modèle de refroidissement

- **Dérivée** : avec $u = 1 + 0,5t$,

$$T'(t) = 60 \times \left(-\frac{0,5}{(1 + 0,5t)^2} \right) = \frac{-30}{(1 + 0,5t)^2}$$

- **Signe** : toujours **négative** — la température **décroît** constamment ✓
- **Température initiale** : $T(0) = 20 + 60 = 80$ °C.
- **Limite** : $T(t) \rightarrow 20$ °C — la température ambiante ✓
- **Seuil** : $20 + \frac{60}{1 + 0,5t} < 30$ équivaut à $\frac{60}{1 + 0,5t} < 10$, soit $1 + 0,5t > 6$ et $t > 10$ minutes
- **Vérification** : $T(10) = 20 + \frac{60}{6} = 30$ °C exactement ✓
- **Contrôles** : $T(2) = 20 + 30 = 50$ °C ; $T(6) = 20 + 15 = 35$ °C ; $T(20) = 20 + \frac{60}{11} \approx 25,45$ °C ✓
- **Vitesse de refroidissement** : $T'(0) = -30$ °C/min au départ, mais $T'(10) = \frac{-30}{36} \approx -0,833$ °C/min — le refroidissement **ralentit** fortement ✓
- **Temps pour atteindre 21 °C** : $\frac{60}{1 + 0,5t} < 1$ donne $t > 118$ minutes — la dernière poignée de degrés est très lente ✓

- **Remarque** : un modèle physique plus réaliste serait **exponentiel** ($T = 20 + 60e^{-kt}$), mais ce modèle rationnel en donne déjà l'allure.

Réponse. T décroît de 80 °C vers 20 °C ; $T < 30$ °C après 10 minutes.

Correction de l'exercice 4 - Étude avec racine carrée

- **Domaine** : $4 - x \geq 0$, donc $x \leq 4$; avec l'énoncé, $[0; 4]$.
- **Dérivée** (pour $x < 4$) — produit avec $u = x$ et $v = \sqrt{4 - x}$, $v' = \frac{-1}{2\sqrt{4 - x}}$:

$$f'(x) = \sqrt{4 - x} - \frac{x}{2\sqrt{4 - x}} = \frac{2(4 - x) - x}{2\sqrt{4 - x}} = \frac{8 - 3x}{2\sqrt{4 - x}}$$

- **Signe** : le dénominateur est positif, donc f' a le signe de $8 - 3x$ — positive avant $\frac{8}{3}$, négative après.
- **Maximum** en $x = \frac{8}{3} \approx 2,6667$.
- **Valeur** :

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{4 - \frac{8}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \approx 3,0792$$
- **Contrôles** : $f(2) = 2\sqrt{2} \approx 2,8284$ et $f(3) = 3 \times 1 = 3$ — tous deux inférieurs ✓
- **Bornes** : $f(0) = 0$ et $f(4) = 0$ ✓
- **Non-dérivabilité en 4** : $f'(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 4^-$ — tangente **verticale** ✓
- **Contrôle du calcul** : $\frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9} \approx \frac{27,713}{9} \approx 3,0792$ ✓
- **Symétrie de la règle** : pour $f(x) = x\sqrt{a - x}$, le maximum est toujours en $x = \frac{2a}{3}$ — ici $\frac{8}{3}$ ✓

Réponse. Maximum $\frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9} \approx 3,08$ en $x = \frac{8}{3}$.

Correction de l'exercice 5 - Trajectoire optimale

- **Dérivée** : $y' = 1 - \frac{x}{20}$.
- **Racine** : $x = 20$ m.
- **Signe** : positive avant, négative après — **maximum** ✓
- **Hauteur maximale** :

$$y(20) = 20 - \frac{400}{40} = 20 - 10 = 10 \text{ m}$$
- **Portée** : $y = 0$ donne $x\left(1 - \frac{x}{40}\right) = 0$, donc $x = 0$ ou

$$x = 40 \text{ m}$$
- **Symétrie** : le sommet est au **milieu** de la portée ($20 = \frac{40}{2}$) ✓
- **Angle de départ** : la pente initiale vaut $y'(0) = 1$, donc l'angle est $\arctan 1 = 45^\circ$ ✓
- **Angle d'arrivée** : $y'(40) = 1 - 2 = -1$, soit -45° — symétrique, comme attendu sans frottement ✓
- **Contrôles** : $y(10) = 10 - 2,5 = 7,5$ m ; $y(30) = 30 - 22,5 = 7,5$ m ✓ — la symétrie se vérifie.

- **Rapport hauteur/portée** : $\frac{10}{40} = 0,25$ — un quart, valeur caractéristique d'un tir à 45° ✓
- **Forme canonique** : $y = -\frac{1}{40}(x - 20)^2 + 10$, qui donne directement le sommet ✓

Réponse. Hauteur maximale 10 m à $x = 20$ m, portée 40 m, angle de départ 45° .

Correction de l'exercice 6 - Fonction à deux paramètres

- **Passage par (1 ; 1)** : $\frac{a+b}{2} = 1$, donc $a + b = 2$.
- **Dérivée** : avec $u = ax + b$ et $v = x^2 + 1$,

$$f(x) = \frac{a(x^2 + 1) - (ax + b)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{ax^2 + a - 2ax^2 - 2bx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2 + 1)^2}$$
- **Tangente horizontale** : $f'(1) = 0$ donne $-a - 2b + a = 0$, soit $-2b = 0$ et $b = 0$
- **Puis** : $a = 2$.
- **Fonction** : $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- **Vérifications** : $f(1) = \frac{2}{2} = 1$ ✓ et $f(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$, nulle en $x = \pm 1$ ✓
- **Nature** : f passe de + à - en $x = 1$, c'est un **maximum** ✓
- **Autre extremum** : $f(-1) = -1$, un **minimum** ✓
- **Imparité** : $f(-x) = -f(x)$ — la courbe est symétrique par rapport à l'origine ✓
- **Encadrement** : $-1 \leq f(x) \leq 1$ pour tout x réel ✓
- **Contrôle** : $f(2) = \frac{4}{5} = 0,8 < 1$ ✓ et $f(0,5) = \frac{1}{1,25} = 0,8$ ✓

Réponse. $a = 2$ et $b = 0$; $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, maximum 1 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Intensité lumineuse

- **Domaine** : $0 < x < 10$.
- **Dérivée** :

$$E'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{16}{(10 - x)^3}$$
- **Annulation** : $\frac{16}{(10 - x)^3} = \frac{2}{x^3}$, soit $16x^3 = 2(10 - x)^3$ et $8x^3 = (10 - x)^3$.
- **Racine cubique** : $2x = 10 - x$, donc $3x = 10$ et

$$x = \frac{10}{3} \approx 3,3333$$
- **Signe** : E' est négative avant (le terme en $-\frac{2}{x^3}$ domine) et positive après — **minimum** ✓
- **Éclairement minimal.** Les deux distances sont $\frac{10}{3}$ et $10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$.
- **Premier terme** : $\frac{1}{(10/3)^2} = \frac{9}{100} = 0,09$.
- **Second terme** : $\frac{8}{(20/3)^2} = \frac{8 \times 9}{400} = \frac{72}{400} = 0,18$.

$$E\left(\frac{10}{3}\right) = 0,09 + 0,18 = 0,27$$

- **Contrôles** : $E(3) = \frac{1}{9} + \frac{8}{49} \approx 0,1111 + 0,1633 = 0,2744$ ✓ et $E(4) = \frac{1}{16} + \frac{8}{36} \approx 0,0625 + 0,2222 = 0,2847$ ✓ — tous deux supérieurs à 0,27.
- **Interprétation physique** : le point le moins éclairé est plus proche de la lampe **faible**, au tiers de la distance — cohérent avec l'intuition ✓
- **Règle** : le point critique est tel que $\frac{d_A}{d_B} = \left(\frac{I_A}{I_B}\right)^{1/3}$; ici $\frac{10/3}{20/3} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}$ ✓

Réponse. $x = \frac{10}{3}$, avec un éclairage minimal de 0,27.

Correction de l'exercice 8 - Aire sous une tangente

- **Tangente** : $f(a) = \frac{1}{a}$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$, donc
$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$
- **Intersection avec (Oy)** : $x = 0$ donne $y = \frac{2}{a}$, donc $Q\left(0; \frac{2}{a}\right)$.
- **Intersection avec (Ox)** : $y = 0$ donne $\frac{x}{a^2} = \frac{2}{a}$, soit $x = 2a$ et $P(2a; 0)$.
- **Aire du triangle rectangle** :
$$A = \frac{OP \times OQ}{2} = \frac{2a \times \frac{2}{a}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
- **Conclusion** : l'aire vaut **toujours** 2, indépendamment de a ✓
- **Contrôles** : pour $a = 1$, la tangente est $y = -x + 2$, avec $P(2; 0)$ et $Q(0; 2)$, d'aire $\frac{2 \times 2}{2} = 2$ ✓
- Pour $a = 4$, la tangente est $y = -\frac{x}{16} + \frac{1}{2}$, avec $P(8; 0)$ et $Q(0; 0,5)$, d'aire $\frac{8 \times 0,5}{2} = 2$ ✓
- **Propriété du point de contact** : $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ est le **milieu** de $[PQ]$, car $\frac{0 + 2a}{2} = a$ ✓ et $\frac{2/a + 0}{2} = \frac{1}{a}$ ✓
- **Lecture géométrique** : cette propriété caractérise l'hyperbole $xy = 1$ — toutes ses tangentes découpent des triangles d'aire égale.
- **Généralisation** : pour $y = \frac{k}{x}$, l'aire vaut $2k$.

Réponse. $P(2a; 0)$ et $Q\left(0; \frac{2}{a}\right)$ donnent une aire constante égale à 2.

Correction de l'exercice 9 - Concentration d'un médicament

- **Dérivée** : avec $u = 4t$ et $v = t^2 + 4$,
$$C'(t) = \frac{4(t^2 + 4) - 4t \times 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{4t^2 + 16 - 8t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{16 - 4t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{4(4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2}$$
- **Racine positive** : $t = 2$ heures.
- **Signe** : positive avant 2, négative après — **maximum** ✓
- **Concentration maximale** :

$$C(2) = \frac{8}{8} = 1 \text{ mg/L}$$

- **Contrôles** : $C(1) = \frac{4}{5} = 0,8$; $C(4) = \frac{16}{20} = 0,8$; $C(3) = \frac{12}{13} \approx 0,923$ ✓ — tous inférieurs à 1.
- **Symétrie** : $C\left(\frac{4}{t}\right) = C(t)$, d'où l'égalité $C(1) = C(4)$ ✓
- **Limite** : $C(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ — le médicament est **éliminé** ✓
- **Seuil thérapeutique de 0,5 mg/L** : $\frac{4t}{t^2 + 4} > 0,5$ donne $t^2 - 8t + 4 < 0$, soit $t \in]4 - 2\sqrt{3} ; 4 + 2\sqrt{3}[$, environ $]0,536 ; 7,464[$.
- **Durée d'efficacité** : environ 6,93 heures ✓
- **Contrôle** : $C(0,536) = \frac{2,144}{4,287} \approx 0,500$ ✓ et $C(7,464) = \frac{29,856}{59,711} \approx 0,500$ ✓
- **Lecture pharmacologique** : le pic à 2 h et la fenêtre de 7 h déterminent la posologie — ici trois prises par jour.

Réponse. Pic de 1 mg/L à $t = 2$ h ; efficacité ($> 0,5$) pendant environ 6,93 h.

Correction de l'exercice 10 - Deux tangentes perpendiculaires

- **Pentes** : en $x = a$, la tangente a pour pente $2a$; en $x = b$, elle a pour pente $2b$.
- **Perpendicularité** : $2a \times 2b = -1$, donc

$$ab = -\frac{1}{4}$$

- **Exemple** : $a = 1$ et $b = -\frac{1}{4}$.
- **Tangentes** : $y = 2x - 1$ (en $a = 1$) et $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ (en $b = -0,25$).
- **Contrôle de la seconde** : $f(-0,25) = 0,0625$ et $y = -0,5(x + 0,25) + 0,0625 = -0,5x - 0,0625$ ✓
- **Intersection** : $2x - 1 = -0,5x - 0,0625$ donne $2,5x = 0,9375$, soit $x = 0,375$.
- **Ordonnée** : $y = 2 \times 0,375 - 1 = -0,25$.
 $I(0,375 ; -0,25)$
- **Propriété remarquable** : l'ordonnée vaut $-\frac{1}{4}$, **quelle que soit** la paire choisie !
- **Démonstration** : les tangentes $y = 2ax - a^2$ et $y = 2bx - b^2$ se coupent en $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = ab = -\frac{1}{4}$ ✓
- **Contrôle avec une autre paire** : $a = 2$ et $b = -\frac{1}{8}$ donnent $x = \frac{2 - 0,125}{2} = 0,9375$ et $y = -0,25$ ✓
- **Conclusion géométrique** : le lieu de ces points d'intersection est la droite $y = -\frac{1}{4}$ — c'est la **directrice** de la parabole ✓

Réponse. Il faut $ab = -\frac{1}{4}$; les tangentes se coupent toujours sur la directrice $y = -\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 11 - Étude d'une fonction paire

- **Parité** : $f(-x) = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$ — la fonction est **paire** ✓
- **Conséquence** : il suffit d'étudier $[0 ; +\infty[$ et de compléter par symétrie.
- **Dérivée** : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$.

- **Racines** : $-1, 0$ et 1 .
- **Signe** : négative sur $] - \infty ; -1[$, positive sur $] - 1 ; 0[$, négative sur $] 0 ; 1[$, positive sur $] 1 ; +\infty[$.
- **Valeurs** : $f(\pm 1) = 1 - 2 + 1 = 0$ et $f(0) = 1$.
- **Extremums** : deux **minimums globaux** 0 en ± 1 , un **maximum local** 1 en $x = 0$.
- **Factorisation** : $f(x) = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2 \checkmark$
- **Contrôle** : cette écriture confirme immédiatement que $f \geq 0$ et que les minimums sont en $\pm 1 \checkmark$
- **Contrôles numériques** : $f(0,5) = 0,0625 - 0,5 + 1 = 0,5625 \checkmark$; $f(2) = 16 - 8 + 1 = 9 \checkmark$; $f(1,5) = 5,0625 - 4,5 + 1 = 1,5625 \checkmark$
- **Vérification par la forme factorisée** : $f(1,5) = (2,25 - 1)^2 = 1,25^2 = 1,5625 \checkmark$
- **Racines doubles** : ± 1 sont racines de f **et** de f' — signature d'un minimum atteignant $0 \checkmark$
- **Imparité de f** : $f(-x) = -4x^3 + 4x = -f(x) \checkmark$, comme prévu pour la dérivée d'une fonction paire.

Réponse. Paire ; $f(x) = (x^2 - 1)^2$; minimums 0 en ± 1 , maximum local 1 en 0 .

Correction de l'exercice 12 - Prix et demande

- **Domaine** : $q \geq 0$ donne $p \leq 50$; et le prix doit dépasser le coût, donc $15 \leq p \leq 50$.
- **Bénéfice** :

$$B(p) = (p - 15)q = (p - 15)(200 - 4p) = 200p - 4p^2 - 3000 + 60p = -4p^2 + 260p - 3000$$
- **Dérivée** : $B'(p) = -8p + 260$.
- **Racine** : $p = 32,5$ €.
- **Signe** : positive avant, négative après — **maximum** $\checkmark$
- **Bénéfice maximal** :

$$B(32,5) = -4 \times 1056,25 + 8450 - 3000 = -4225 + 8450 - 3000 = 1225$$
 €
- **Quantité vendue** : $q = 200 - 130 = 70$ unités.
- **Marge unitaire** : $32,5 - 15 = 17,5$ €, et $70 \times 17,5 = 1225$ € $\checkmark$
- **Contrôles** : $B(30) = -3600 + 7800 - 3000 = 1200$ et $B(35) = -4900 + 9100 - 3000 = 1200 \checkmark$
- **Propriété** : le prix optimal est la **moyenne** du coût unitaire (15 €) et du prix maximal (50 €) : $\frac{15 + 50}{2} = 32,5 \checkmark$
- **Seuil de rentabilité** : $B(p) = 0$ pour $p = 15$ (marge nulle) et $p = 50$ (demande nulle) $\checkmark$
- **Sensibilité** : une erreur de $2,50$ € sur le prix ne coûte que 25 € de bénéfice (2%) — l'optimum est **plat**, ce qui est une bonne nouvelle en pratique.

Réponse. Prix de $32,50$ € pour 70 unités, bénéfice de 1225 €.

Correction de l'exercice 13 - Fonction définie par un quotient de degrés 2

- **Domaine** : $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas).
- **Parité** : $f(-x) = f(x)$ — fonction **paire** $\checkmark$
- **Dérivée** :

$$f(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

- **Signe** : celui de x — négative avant 0, positive après.
 - **Variations** : décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$.
 - **Minimum** : $f(0) = -1$, minimum **global** ✓
 - **Limites** : en divisant par x^2 , $f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.
 - **Image** : f croît de -1 à 1 **sans atteindre** 1 , donc

$$f(\mathbb{R}) = [-1 ; 1[$$
 - **Contrôles** : $f(1) = 0$ ✓ ; $f(2) = \frac{3}{5} = 0,6$ ✓ ; $f(10) = \frac{99}{101} \approx 0,980$ ✓
 - **Vérification que 1 n'est pas atteint** : $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$ donnerait $x^2 - 1 = x^2 + 1$, soit $-1 = 1$ — **impossible** ✓
 - **Réécriture** : $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$, qui rend tout immédiat : minimum en $x = 0$ (où le terme retranché est maximal) et limite 1 ✓
 - **Asymptote** : la droite $y = 1$, approchée par valeurs **inférieures** ✓
- Réponse.** Décroissante puis croissante ; minimum -1 en 0 ; image $[-1 ; 1[$.

Correction de l'exercice 14 - Optimisation avec contrainte de coût

- **Notations** : x la longueur du côté avant, y la profondeur.
- **Coût** : $10x$ (avant) + $5x$ (arrière) + $2 \times 5y$ (côtés) = $15x + 10y = 600$.
- **Contrainte** : $y = 60 - 1,5x$, avec $0 < x < 40$.
- **Aire** :

$$A(x) = x(60 - 1,5x) = 60x - 1,5x^2$$
- **Dérivée** : $A'(x) = 60 - 3x$.
- **Racine** : $x = 20$ m, donc $y = 60 - 30 = 30$ m.
- **Aire maximale** :

$$A(20) = 20 \times 30 = 600 \text{ m}^2$$
- **Contrôle du budget** : $15 \times 20 + 10 \times 30 = 300 + 300 = 600$ € ✓
- **Propriété remarquable** : le budget se répartit **exactement en deux moitiés** entre les côtés avant-arrière et les côtés latéraux ✓
- **Contrôles** : $A(16) = 16 \times 36 = 576$ et $A(24) = 24 \times 24 = 576$ ✓
- **Comparaison avec un coût uniforme** : à 5 €/m partout, 600 € achèteraient 120 m de clôture, soit un carré de 30 m de côté et 900 m^2 — nettement plus ✓
- **Leçon** : la contrainte de coût **asymétrique** déforme l'optimum, qui n'est plus un carré mais un rectangle plus **profond** que large.

Réponse. 20 m (avant) $\times$ 30 m (profondeur), pour 600 m^2 .

Correction de l'exercice 15 - Fonction et tangente en un point d'inflexion

- **Valeur** : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.
- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$, donc $f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$.
- **Tangente** :

$$y = -1(x - 1) + 0 = -x + 1$$

- **Position relative** :

$$f(x) - (-x + 1) = x^3 - 3x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

- **Contrôle du développement** : $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ✓
- **Signe** : celui de $x - 1$.
- **Conclusion** :
- sur $] - \infty ; 1[$: la courbe est **en dessous** de la tangente ;
- sur $]1 ; +\infty[$: elle est **au-dessus** ;
- contact unique en $x = 1$, que la tangente **traverse**.
- **Nature du point** : $(1 ; 0)$ est un **point d'inflexion** ✓
- **Contrôle** : $f'(x) = 6x - 6$ s'annule bien en $x = 1$ en changeant de signe ✓
- **Contrôles numériques** : $f(0) = 0$ contre $-0 + 1 = 1$ (courbe en dessous ✓) ;
 $f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$ contre $-2 + 1 = -1$ (courbe au-dessus ✓)
- **Racines de f** : $x(x - 1)(x - 2)$, soit 0, 1 et 2 ✓
- **Symétrie** : la courbe est symétrique par rapport au point d'inflexion $(1 ; 0)$ — on le vérifie avec $f(0) + f(2) = 0$ ✓

Réponse. $y = -x + 1$; $f(x) - y = (x - 1)^3$: la tangente traverse la courbe en $(1 ; 0)$, point d'inflexion.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude et optimisation combinées

a) **Dérivée** — avec $u = x^2$ et $v = x + 1$:

$$f(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

- **Signe sur $] - 1 ; +\infty[$** : $x + 2 > 0$ et $(x + 1)^2 > 0$, donc f a le signe de x .
- **Variations** : décroissante sur $] - 1 ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- **Minimum** : $f(0) = 0$ ✓
- **Limite en -1^+** : le numérateur tend vers $1 > 0$ et le dénominateur vers 0^+ , donc $f(x) \rightarrow +\infty$ ✓
- **Contrôles** : $f(1) = \frac{1}{2} = 0,5$; $f(-0,5) = \frac{0,25}{0,5} = 0,5$; $f(3) = \frac{9}{4} = 2,25$ ✓

b) **Tangente en 1** : $f(1) = 0,5$ et $f'(1) = \frac{1 \times 3}{4} = 0,75$.

$$y = 0,75(x - 1) + 0,5 = 0,75x - 0,25$$

- **Contrôle** : $0,75 - 0,25 = 0,5$ ✓

c) **Périmètre du rectangle** : de largeur x et de hauteur $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$,

$$P(x) = 2 \left(x + \frac{x^2}{x+1} \right)$$

- **Dérivée** : $P'(x) = 2 \left(1 + \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \right)$.
- **Signe** : pour $x > 0$, les deux termes sont **strictement positifs**, donc $P'(x) > 0$.
- **Conclusion** : P est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$ — elle n'a **pas de minimum atteint** ✓
- **Comportement** : $P(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, sans jamais l'atteindre.
- **Contrôles** : $P(0,5) = 2(0,5 + 0,1667) \approx 1,333$; $P(1) = 2 \times 1,5 = 3$;
 $P(2) = 2 \left(2 + \frac{4}{3} \right) \approx 6,667$ ✓

- **Interprétation** : plus le rectangle est petit, plus son périmètre est petit — il n’y a pas d’optimum intérieur, la borne inférieure 0 étant seulement une **limite**.
- **Leçon méthodologique** : un problème d’optimisation n’a pas toujours de solution ; il faut **vérifier** que la dérivée change bien de signe avant de conclure à un extremum.

Réponse. a) $\min 0$ en $x = 0$ · b) $y = 0,75x - 0,25$ · c) P strictement croissante : pas de minimum atteint.