

Plaquette 2 - Tableaux de variations, signe de la dérivée et extremums

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lien dérivée / variations. Sur un intervalle I :

$$f' \geq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ croissante sur } I \quad f' \leq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ décroissante sur } I$$

Si $f' > 0$ (strictement) sauf en un nombre fini de points, f est **strictement** croissante.

Extremum local. Si f' **change de signe** en a (intérieur à I), alors $f(a)$ est un extremum local :

- f' passe de $-$ à $+$ → **minimum** local ;
- f' passe de $+$ à $-$ → **maximum** local.

Attention : $f'(a) = 0$ **ne suffit pas**. Pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ sans extremum, car f' ne change pas de signe.

Dérivées usuelles.

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	ku	$u + v$	uv	$\frac{u}{v}$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	ku'	$u' + v'$	$u'v + uv'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Méthode du tableau de variations.

1. Domaine de définition et de dérivabilité. 2. Calcul et **factorisation** de f' . 3. Signe de f' (tableau de signes). 4. Tableau de variations avec les **valeurs aux bornes** et aux extremums.

Extremum global. Sur un intervalle **fermé borné** $[a; b]$, le maximum et le minimum sont atteints soit en un point où $f' = 0$, soit **aux bornes** — il faut donc toujours comparer $f(a)$, $f(b)$ et les extremums locaux.

Correction de l'exercice 1 - Signe d'une dérivée affine

- **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$.
- **Signe** : négative pour $x < 3$, positive pour $x > 3$.
- **Variations** : f décroît sur $] -\infty ; 3]$ puis croît sur $[3 ; +\infty[$.
- **Extremum** : minimum en $x = 3$, de valeur

$$f(3) = 9 - 18 + 1 = -8$$
- **Contrôle par la forme canonique** : $f(x) = (x - 3)^2 - 8 \geq -8$, avec égalité en $x = 3$ ✓
- **Minimum global** : oui, car la parabole s'ouvre vers le haut ✓
- **Contrôles** : $f(0) = 1 > -8$ ✓ et $f(6) = 36 - 36 + 1 = 1 > -8$ ✓
- **Symétrie** : $f(3 - h) = f(3 + h)$ — on le vérifie avec $f(0) = f(6) = 1$ ✓
- **Racines** : $\Delta = 36 - 4 = 32$, donc $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$, soit environ 0,1716 et 5,8284.

Réponse. Minimum -8 en $x = 3$; $f(x) = (x - 3)^2 - 8$.

Correction de l'exercice 2 - Dérivée d'un polynôme de degré 3

- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$.
- **Racines** : $x = -1$ et $x = 3$.
- **Signe** : positive à l'**extérieur** de $[-1 ; 3]$, négative à l'intérieur.
- **Variations** : croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$.
- **Valeurs** :

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7 \quad f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$$
- **Extremums** : **maximum local** 7 en -1 , **minimum local** -25 en 3 .
- **Contrôles** : $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0 < 7 \checkmark$ et $f(0) = 2 < 7 \checkmark$
- $f(4) = 64 - 48 - 36 + 2 = -18 > -25 \checkmark$
- **Aucun extremum global** : $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty \checkmark$
- **Contrôle de la factorisation** : $3(x - 3)(x + 1) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 6x - 9 \checkmark$

Réponse. Croissante, décroissante sur $[-1 ; 3]$, croissante ; max local 7 en -1 , min local -25 en 3 .

Correction de l'exercice 3 - Extremum sur un intervalle fermé

- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$.
- **Racines dans l'intervalle** : $x = 1$ (et $x = -1$, qui est une borne).
- **Signe sur $[-1 ; 3]$** : négative sur $[-1 ; 1]$, positive sur $[1 ; 3]$.
- **Valeurs candidates** :

$$f(-1) = -1 + 3 = 2 \quad f(1) = 1 - 3 = -2 \quad f(3) = 27 - 9 = 18$$
- **Conclusion** : **maximum** 18 en $x = 3$ et **minimum** -2 en $x = 1$.
- **Attention** : le maximum est atteint **à la borne**, pas en un point où $f' = 0$ — c'est le piège classique.
- **Contrôles** : $f(0) = 0$, entre -2 et $18 \checkmark$; $f(2) = 8 - 6 = 2 \checkmark$
- **Comparaison** : $f(-1) = 2$ est un maximum **local** (à la borne gauche) mais pas global $\checkmark$
- **Sur $[-2 ; 2]$ en revanche** : $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$ — le maximum vaudrait 2, atteint **deux fois** $\checkmark$

Réponse. Maximum 18 en $x = 3$ (borne), minimum -2 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 4 - Dérivée d'un quotient

- **Domaine** : $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule jamais).
- **Dérivée** : avec $u = x$ et $v = x^2 + 1$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$
- **Signe** : le dénominateur est positif, donc f' a le signe de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ — positive sur $] -1 ; 1[$, négative ailleurs.
- **Variations** : décroissante sur $] -\infty ; -1]$, croissante sur $[-1 ; 1]$, décroissante sur $[1 ; +\infty[$.
- **Extremums** :

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ (minimum)} \quad f(1) = \frac{1}{2} \text{ (maximum)}$$

- **Extremums globaux** : oui, car $f(x) \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ ✓
- **Contrôles** : $f(0) = 0$ ✓ ; $f(2) = \frac{2}{5} = 0,4 < 0,5$ ✓ ; $f(10) = \frac{10}{101} \approx 0,099$ ✓
- **Imparité** : $f(-x) = -f(x)$, d'où la symétrie des extremums ✓
- **Encadrement** : $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout x réel.

Réponse. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; minimum $-\frac{1}{2}$ en -1 , maximum $\frac{1}{2}$ en 1 .

Correction de l'exercice 5 - Dérivée nulle sans extremum

Première fonction. $f(x) = 3x^2 + 2$.

- Comme $3x^2 \geq 0$, on a $f(x) \geq 2 > 0$ pour tout x ✓
- **Conclusion** : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, sans aucun extremum ✓
- **Contrôles** : $f(-1) = -3$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ — croissance nette ✓

Seconde fonction. $g(x) = 3x^2$.

- $g'(0) = 0$, mais $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ — la dérivée **ne change pas de signe** ✓
- **Conclusion** : g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et 0 n'est **pas** un extremum.
- **Contrôles** : $g(-1) = -1 < 0 < 1 = g(1)$ ✓ — la fonction traverse bien 0 en croissant.
- **Nom du point** : $(0; 0)$ est un **point d'inflexion à tangente horizontale**.
- **Leçon essentielle** : « $f'(a) = 0$ » est une condition **nécessaire** mais **pas suffisante** d'extremum. La condition suffisante est le **changement de signe** de f' .
- **Contre-exemple supplémentaire** : $h(x) = x^4$ a $h'(0) = 0$ **et** un minimum en 0 — là, la dérivée change bien de signe.

Réponse. $f(x) = 3x^2 + 2 > 0$; pour g , $g'(0) = 0$ mais g' garde le signe $+$: pas d'extremum.

Correction de l'exercice 6 - Optimisation d'un volume

- **Volume** : base carrée de côté $20 - 2x$, hauteur x .

$$V(x) = x(20 - 2x)^2 \quad \text{pour } x \in]0; 10[$$

- **Dérivée** — produit avec $u = x$ et $v = (20 - 2x)^2$, $v' = -4(20 - 2x)$:

$$V'(x) = (20 - 2x)^2 - 4x(20 - 2x) = (20 - 2x)[(20 - 2x) - 4x] = (20 - 2x)(20 - 6x)$$

- **Racines** : $x = 10$ (exclue) et $x = \frac{10}{3} \approx 3,333$.
- **Signe sur $]0; 10[$** : $20 - 2x > 0$ toujours ; $20 - 6x$ positif avant $\frac{10}{3}$, négatif après.
- **Conclusion** : maximum en $x = \frac{10}{3}$ cm.
- **Volume maximal** :

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{3} \times \left(20 - \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \frac{1600}{9} = \frac{16\,000}{27} \approx 592,6 \text{ cm}^3$$

- **Contrôles** : $V(3) = 3 \times 196 = 588$ et $V(4) = 4 \times 144 = 576$ — tous deux inférieurs ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $V'(3) = 14 \times 2 = 28 > 0$ ✓ et $V'(4) = 12 \times (-4) = -48 < 0$ ✓
- **Règle générale** : pour un carré de côté c , l'optimum est $x = \frac{c}{6}$ — ici $\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ ✓

Réponse. $x = \frac{10}{3}$ cm, pour un volume de $\frac{16\,000}{27} \approx 592,6 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 7 - Variations d'une fonction avec racine

— **Dérivée** (pour $x > 0$) :

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

— **Signe** : $\sqrt{x} > 0$, donc f' a le signe de $\sqrt{x} - 1$ — négative pour $x < 1$, positive pour $x > 1$.

— **Variations** : décroissante sur $[0; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$.

— **Minimum** :

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

— **Contrôles** : $f(0) = 0 > -1$ ✓ ; $f(4) = 4 - 4 = 0 > -1$ ✓ ; $f(0,25) = 0,25 - 1 = -0,75 > -1$ ✓

— **Minimum global** : oui, car $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ ✓

— **Zéros** : $f(x) = 0$ donne $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 4$ ✓

— **Non-dérivabilité en 0** : $f'(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ — la tangente y est **verticale** ✓

— **Réécriture** : en posant $t = \sqrt{x}$, $f = t^2 - 2t = (t - 1)^2 - 1$ — d'où immédiatement le minimum -1 pour $t = 1$ ✓

Réponse. Décroissante sur $[0; 1]$, croissante ensuite ; minimum -1 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Lecture d'un tableau de variations

— **Variations** : décroissante de 5 à -2 , croissante de -2 à 6, décroissante de 6 à 1.

— **Extremums locaux** : minimum -2 en $x = -1$; maximum 6 en $x = 2$.

— **Extremums globaux** : maximum 6 en 2 ; minimum -2 en -1 ✓

— **Équation** $f(x) = 0$ — on examine chaque intervalle de monotonie :

— sur $[-3; -1]$: f décroît de 5 à -2 , elle traverse 0 **une** fois ;

— sur $[-1; 2]$: f croît de -2 à 6, elle traverse 0 **une** fois ;

— sur $[2; 4]$: f décroît de 6 à 1, elle reste **strictement positive** — aucune solution.

— **Conclusion** : l'équation $f(x) = 0$ a exactement **deux** solutions ✓

— **Justification** : sur chaque intervalle, f est continue et **strictement monotone**, donc elle prend chaque valeur de son image **au plus une fois**.

— **Équation** $f(x) = 3$: une solution sur $[-3; -1]$, une sur $[-1; 2]$, une sur $[2; 4]$ — soit **trois** solutions ✓

— **Équation** $f(x) = 7$: **aucune** solution, car $7 > 6 = \max f$ ✓

Réponse. Max 6 en 2, min -2 en -1 ; $f(x) = 0$ a deux solutions.

Correction de l'exercice 9 - Fonction à paramètre

— **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 + a$.

— **Condition** : il faut $f'(x) \geq 0$ pour tout x , avec annulation en au plus un point.

— **Cas** $a \geq 0$: $3x^2 + a \geq 0$ toujours ✓ — la fonction est croissante.

— **Cas** $a < 0$: $f'(x) = 0$ pour $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$, et f' est **négative** entre ces deux racines — la fonction n'est pas monotone.

— **Conclusion** :

$$a \geq 0$$

— **Contrôles** : pour $a = 3$, $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$ ✓

— Pour $a = 0$, $f(x) = x^3$ est strictement croissante malgré $f'(0) = 0$ ✓

- Pour $a = -3$, $f(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en ± 1 et f a un maximum local en -1 ($f(-1) = 2$) et un minimum local en 1 ($f(1) = -2$) ✓
- **Lecture** : le paramètre a contrôle la « pente minimale » de la fonction en 0 ; dès qu'elle devient négative, deux extremums apparaissent.
- **Cas limite** $a = 0$: c'est le seul cas où la dérivée s'annule tout en conservant la stricte croissance.

Réponse. $a \geq 0$.

Correction de l'exercice 10 - Aire maximale d'un rectangle

- **Paramétrage** : le sommet supérieur droit est $(x; 9 - x^2)$ avec $0 < x < 3$.
- **Aire** : largeur $2x$, hauteur $9 - x^2$, donc

$$A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$$

- **Dérivée** : $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6(3 - x^2)$.
- **Racine positive** : $x = \sqrt{3} \approx 1,7321$.
- **Signe** : positive avant $\sqrt{3}$, négative après — **maximum** en $x = \sqrt{3}$ ✓
- **Dimensions** : largeur $2\sqrt{3} \approx 3,4641$, hauteur $9 - 3 = 6$.
- **Aire maximale** :

$$A(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3} \approx 20,785$$

- **Contrôles** : $A(1,5) = 3 \times 6,75 = 20,25$ et $A(2) = 4 \times 5 = 20$ — tous deux inférieurs ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $A'(1,5) = 18 - 13,5 = 4,5 > 0$ ✓ et $A'(2) = 18 - 24 = -6 < 0$ ✓
- **Propriété remarquable** : la hauteur optimale (6) vaut exactement les **deux tiers** de la hauteur de la parabole (9) — un résultat général pour ce type de problème ✓

Réponse. Largeur $2\sqrt{3} \approx 3,46$, hauteur 6, aire $12\sqrt{3} \approx 20,79$.

Correction de l'exercice 11 - Variations d'une fonction homographique

- **Domaine** : $x \neq -2$.
- **Dérivée** : avec $u = 2x - 3$ et $v = x + 2$,

$$f(x) = \frac{2(x+2) - (2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+3}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$
- **Signe** : $f(x) > 0$ pour tout $x \neq -2$.
- **Conclusion** : f est **strictement croissante** sur $] -\infty; -2[$ et sur $] -2; +\infty[$, séparément.
- **Attention** : elle n'est **pas** croissante sur la réunion ! $f(-3) = \frac{-9}{-1} = 9$ alors que $f(0) = -\frac{3}{2} = -1,5$ ✓
- **Contrôle par la formule** : $ad - bc = 2 \times 2 - (-3) \times 1 = 7 > 0$ ✓
- **Réécriture** : $f(x) = \frac{2(x+2) - 7}{x+2} = 2 - \frac{7}{x+2}$, d'où immédiatement $f(x) = \frac{7}{(x+2)^2}$ ✓
- **Asymptotes** : $x = -2$ (verticale) et $y = 2$ (horizontale).
- **Aucun extremum** : la dérivée ne s'annule jamais ✓
- **Zéro** : $x = 1,5$; **ordonnée à l'origine** : $-1,5$.

Réponse. $f(x) = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$: croissante sur chaque intervalle, sans extremum.

Correction de l'exercice 12 - Coût moyen minimal

— **Coût moyen :**

$$M(q) = \frac{q^2 + 4q + 100}{q} = q + 4 + \frac{100}{q} \quad \text{pour } q > 0$$

— **Dérivée :**

$$M'(q) = 1 - \frac{100}{q^2} = \frac{q^2 - 100}{q^2}$$

— **Racine positive :** $q = 10$.

— **Signe :** négative avant 10, positive après — **minimum** en $q = 10$ ✓

— **Coût moyen minimal :**

$$M(10) = 10 + 4 + 10 = 24$$

— **Contrôles :** $M(8) = 8 + 4 + 12,5 = 24,5$ et $M(12) \approx 12 + 4 + 8,333 = 24,333$ — tous deux supérieurs ✓

— **Propriété économique remarquable :** au minimum du coût moyen, le **coût marginal** $C'(q) = 2q + 4$ vaut $C'(10) = 24 = M(10)$ ✓

— **Démonstration :** $M'(q) = 0$ équivaut à $C'(q)q - C(q) = 0$, soit $C'(q) = \frac{C(q)}{q} = M(q)$ ✓

— **Lecture :** produire moins de 10 unités ne répartit pas assez les 100 € de coût fixe ; produire plus fait exploser le terme quadratique.

Réponse. $q = 10$, pour un coût moyen minimal de 24 (égal au coût marginal).

Correction de l'exercice 13 - Deux extremums à comparer

— **Dérivée :** $f(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$.

— **Racines :** $x = 1$ et $x = 2$.

— **Signe :** positive hors de $[1 ; 2]$, négative à l'intérieur.

— **Valeurs :**

$$f(1) = 2 - 9 + 12 - 3 = 2 \quad f(2) = 16 - 36 + 24 - 3 = 1$$

— **Extremums locaux :** maximum 2 en $x = 1$, minimum 1 en $x = 2$.

— **Bornes de l'intervalle :** $f(0) = -3$ et $f(3) = 54 - 81 + 36 - 3 = 6$.

— **Extremums globaux sur $[0 ; 3]$:** maximum 6 en $x = 3$ et minimum -3 en $x = 0$ — **aux bornes** ✓

— **Conclusion :** les extremums locaux (2 et 1) ne sont **pas** globaux ✓

— **Contrôles :** $f(0,5) = 0,25 - 2,25 + 6 - 3 = 1$ ✓ ; $f(2,5) = 31,25 - 56,25 + 30 - 3 = 2$ ✓

— **Lecture du tableau :** f monte de -3 à 2, redescend à 1, puis remonte à 6 — une double « vague » typique du degré 3.

— **Amplitude de la vague centrale :** seulement 1 unité, d'où une courbe presque plate entre 1 et 2.

Réponse. Max local 2 en 1, min local 1 en 2 ; sur $[0 ; 3]$ les extremums globaux sont -3 et 6, aux bornes.

Correction de l'exercice 14 - Distance minimale

— **Distance au carré** (on minimise le carré, plus simple et équivalent) :

$$d(x) = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^2 + x^4 - 6x^2 + 9 = x^4 - 5x^2 + 9$$

- **Dérivée** : $d'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$.
 - **Racines** : $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \approx \pm 1,5811$.
 - **Valeurs** : $d(0) = 9$ et $d(\pm 1,5811) = 6,25 - 12,5 + 9 = 2,75$.
 - **Conclusion** : le minimum est atteint en $x = \pm\sqrt{2,5}$, avec $d = 2,75$.
 - **Distance** : $\sqrt{2,75} \approx 1,6583$.
 - **Points** : $(\pm 1,5811; 2,5)$ — **deux** solutions symétriques ✓
 - **Contrôles** : distance de $A(0; 3)$ à $(1,5811; 2,5)$: $\sqrt{2,5 + 0,25} = \sqrt{2,75}$ ✓
 - **Comparaison** : le sommet $(0; 0)$ est à la distance 3 de A, nettement plus loin que 1,658 ✓
 - **Piège** : $x = 0$ correspond à un **maximum local** de la distance restreinte au voisinage — la dérivée d' change bien de signe en 0, du + au - pour x croissant sur $[-1,58; 1,58]$ ✓
 - **Contrôle** : $d(1) = 1 - 5 + 9 = 5$, entre 2,75 et 9 ✓
- Réponse.** Les deux points $(\pm\sqrt{2,5}; 2,5)$, à la distance $\sqrt{2,75} \approx 1,66$.

Correction de l'exercice 15 - Fonction définie par morceaux

- **Continuité en 1** : $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$, avec $f(1) = 1$ — la fonction est **continue** ✓
- **Dérivabilité** : à gauche, $f(x) = 2x \rightarrow 2$; à droite, $f(x) = 2$.
- **Conclusion** : les deux demi-dérivées valent 2, la fonction est **dérivable** en 1 avec $f'(1) = 2$ ✓
- **Variations** : $f(x) = 2x$ pour $x < 1$ (négative avant 0, positive après) et $f(x) = 2 > 0$ pour $x > 1$.
- **Tableau** : décroissante sur $] -\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$.
- **Minimum** : $f(0) = 0$, minimum **global** ✓
- **Contrôles** : $f(-2) = 4$; $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(3) = 5$ ✓
- **Raccord lisse** : la parabole et la droite se raccordent avec la **même tangente** en $(1; 1)$ — la droite $y = 2x - 1$ est justement la tangente à $y = x^2$ en ce point ✓
- **Contre-exemple instructif** : avec $f(x) = 3x - 2$ pour $x > 1$, la fonction resterait continue ($3 - 2 = 1$) mais les dérivées seraient 2 et 3 — elle ne serait **pas** dérivable en 1, la courbe présentant un point anguleux.

Réponse. Continue et dérivable en 1 ($f'(1) = 2$) ; minimum global 0 en $x = 0$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète

a) **Dérivée** — avec $u = x^2 - 4$ et $v = x - 1$:

$$f(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 - 4)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

b) **Signe.** Le numérateur a pour discriminant $4 - 16 = -12 < 0$: il est **toujours strictement positif**.

- **Contrôle par forme canonique** : $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 \geq 3 > 0$ ✓
- Le dénominateur est positif sur $]1; +\infty[$, donc $f(x) > 0$.
- **Conclusion** : f est **strictement croissante** sur $]1; +\infty[$, sans extremum.
- **Simplification élégante** : $f(x) = \frac{(x-1)^2 + 3}{(x-1)^2} = 1 + \frac{3}{(x-1)^2} > 1$ ✓

— **Limites** : quand $x \rightarrow 1^+$, le numérateur tend vers $-3 < 0$ et le dénominateur vers 0^+ , donc $f(x) \rightarrow -\infty$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

— **Valeurs** : $f(2) = 0$; $f(3) = \frac{5}{2} = 2,5$; $f(5) = \frac{21}{4} = 5,25$; $f(1,5) = \frac{-1,75}{0,5} = -3,5$ ✓

c) **Équation** $f(x) = 5$. La fonction est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur $]1 ; +\infty[$: elle prend la valeur 5 **exactement une fois**.

— **Résolution** : $x^2 - 4 = 5(x - 1)$ donne $x^2 - 5x + 1 = 0$.

— **Discriminant** : $25 - 4 = 21$, donc $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, soit $x_1 \approx 0,2087$ et $x_2 \approx 4,7913$.

— **Sélection** : seule $x_2 \approx 4,7913$ appartient à $]1 ; +\infty[$ ✓

— **Vérification** : $f(4,7913) = \frac{22,9566 - 4}{3,7913} = \frac{18,9566}{3,7913} \approx 5,0000$ ✓

— **Conclusion** : **une seule** solution, $x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \approx 4,79$.

— **Remarque** : l'autre racine 0,209 est bien solution de l'équation algébrique, mais hors du domaine étudié — il faut toujours **vérifier l'appartenance**.

Réponse. a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2}$ · b) strictement croissante · c) une solution,

$$\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \approx 4,79.$$