Plaquette 2 – Tableaux de variations, signe de la dérivée et extremums

Variations et extremums — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lien dérivée / variations. Sur un intervalle I :

$$f' \geq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ croissante sur } I \qquad f' \leq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ décroissante sur } I$$

Si $f' > 0$ (strictement) sauf en un nombre fini de points, f est **strictement** croissante.

Extremum local. Si f' **change de signe** en a (intérieur à I), alors $f(a)$ est un extremum local :

— f' passe de $-$ à $+$ $\rightarrow$ **minimum** local ;
— f' passe de $+$ à $-$ $\rightarrow$ **maximum** local.

Attention : $f'(a) = 0$ **ne suffit pas**. Pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ sans extremum, car f' ne change pas de signe.

Dérivées usuelles.

! $f(x)$	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	ku	$u+v$	uv	$\frac{u}{v}$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Méthode du tableau de variations.

1. Domaine de définition et de dérivabilité. 2. Calcul et **factorisation** de f'. 3. Signe de f' (tableau de signes). 4. Tableau de variations avec les **valeurs aux bornes** et aux extremums.

Extremum global. Sur un intervalle **fermé borné** $[a\,;b]$, le maximum et le minimum sont atteints soit en un point où $f' = 0$, soit **aux bornes** — il faut donc toujours comparer $f(a)$, $f(b)$ et les extremums locaux.

Correction de l’exercice 1 – Signe d’une dérivée affine

— **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 6 = 2(x-3)$.
— **Signe** : négative pour $x < 3$, positive pour $x > 3$.
— **Variations** : f décroît sur $]-\infty\,;3]$ puis croît sur $[3\,;+\infty[$.
— **Extremum** : minimum en $x = 3$, de valeur

$$f(3) = 9 - 18 + 1 = -8$$

— **Contrôle par la forme canonique** : $f(x) = (x-3)^2 - 8 \geq -8$, avec égalité en $x = 3$ ✓
— **Minimum global** : oui, car la parabole s’ouvre vers le haut ✓
— **Contrôles** : $f(0) = 1 > -8$ ✓ et $f(6) = 36 - 36 + 1 = 1 > -8$ ✓
— **Symétrie** : $f(3-h) = f(3+h)$ — on le vérifie avec $f(0) = f(6) = 1$ ✓
— **Racines** : $\Delta = 36 - 4 = 32$, donc $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$, soit environ 0,1716 et 5,8284.

Réponse. Minimum -8 en $x = 3$; $f(x) = (x-3)^2 - 8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Dérivée d'un polynôme de degré 3

— **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 3(x-3)(x+1)$.
— **Racines** : $x = -1$ et $x = 3$.
— **Signe** : positive à l'**extérieur** de $[-1\,;3]$, négative à l'intérieur.
— **Variations** : croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;3]$, croissante sur $[3\,;+\infty[$.
— **Valeurs** :

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7 \qquad f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$$

— **Extremums** : **maximum local** 7 en -1, **minimum local** -25 en 3.
— **Contrôles** : $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2 = 0 < 7$ ✓ et $f(0) = 2 < 7$ ✓
— $f(4) = 64 - 48 - 36 + 2 = -18 > -25$ ✓
— **Aucun extremum global** : $f(x) \to -\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ ✓
— **Contrôle de la factorisation** : $3(x-3)(x+1) = 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 3x^2 - 6x - 9$ ✓

Réponse. Croissante, décroissante sur $[-1\,;3]$, croissante ; max local 7 en -1, min local -25 en 3.

Correction de l'exercice 3 – Extremum sur un intervalle fermé

— **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
— **Racines dans l'intervalle** : $x = 1$ (et $x = -1$, qui est une borne).
— **Signe sur** $[-1\,;3]$: négative sur $[-1\,;1]$, positive sur $[1\,;3]$.
— **Valeurs candidates** :

$$f(-1) = -1 + 3 = 2 \qquad f(1) = 1 - 3 = -2 \qquad f(3) = 27 - 9 = 18$$

— **Conclusion** : **maximum** 18 en $x = 3$ et **minimum** -2 en $x = 1$.
— **Attention** : le maximum est atteint **à la borne**, pas en un point où $f' = 0$ — c'est le piège classique.
— **Contrôles** : $f(0) = 0$, entre -2 et 18 ✓ ; $f(2) = 8 - 6 = 2$ ✓
— **Comparaison** : $f(-1) = 2$ est un maximum **local** (à la borne gauche) mais pas global ✓
— **Sur** $[-2\,;2]$ **en revanche** : $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$ — le maximum vaudrait 2, atteint **deux fois** ✓

Réponse. Maximum 18 en $x = 3$ (borne), minimum -2 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 4 – Dérivée d'un quotient

— **Domaine** : $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule jamais).
— **Dérivée** : avec $u = x$ et $v = x^2 + 1$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2+1\right) - x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

— **Signe** : le dénominateur est positif, donc f' a le signe de $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ — positive sur $]-1\,;1[$, négative ailleurs.
— **Variations** : décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;1]$, décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
— **Extremums** :

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ (minimum)} \qquad f(1) = \frac{1}{2} \text{ (maximum)}$$

— **Extremums globaux** : oui, car $f(x) \to 0$ en $\pm\infty$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôles** : $f(0) = 0$ ✓ ; $f(2) = \frac{2}{5} = 0{,}4 < 0{,}5$ ✓ ; $f(10) = \frac{10}{101} \approx 0{,}099$ ✓

— **Imparité** : $f(-x) = -f(x)$, d'où la symétrie des extremums ✓

— **Encadrement** : $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout x réel.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$; minimum $-\frac{1}{2}$ en -1, maximum $\frac{1}{2}$ en 1.

Correction de l'exercice 5 – Dérivée nulle sans extremum

Première fonction. $f'(x) = 3x^2 + 2$. Un carré est positif ou nul, donc $3x^2 \geq 0$ et

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \geq 2 > 0$$

pour tout réel x. La dérivée est strictement positive : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, et n'a aucun extremum.

Seconde fonction. $g'(x) = 3x^2$, donc $g'(0) = 0$. Mais $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$: la dérivée **ne change pas de signe** en 0. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $g(-1) = -1 < g(0) = 0 < g(1) = 1$, et 0 n'est pas un extremum.

Leçon : $f'(a) = 0$ est une condition **nécessaire** pour avoir un extremum en a, mais pas suffisante. Ce qui garantit un extremum, c'est un **changement de signe** de la dérivée, comme pour $h(x) = x^4$, dont la dérivée $4x^3$ passe du signe − au signe + en 0.

Réponse. $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$; pour g, $g'(0) = 0$ mais g' garde le signe + : pas d'extremum.

Correction de l'exercice 6 – Optimisation d'un volume

— **Volume** : base carrée de côté $20 - 2x$, hauteur x.

$$V(x) = x(20 - 2x)^2 \qquad \text{pour } x \in]0\,;10[$$

— **Dérivée** — produit avec $u = x$ et $v = (20-2x)^2$, $v' = -4(20-2x)$:

$$V'(x) = (20-2x)^2 - 4x(20-2x) = (20-2x)[(20-2x) - 4x] = (20-2x)(20-6x)$$

— **Racines** : $x = 10$ (exclue) et $x = \frac{10}{3} \approx 3{,}333$.

— **Signe sur** $]0\,;10[$: $20 - 2x > 0$ toujours ; $20 - 6x$ positif avant $\frac{10}{3}$, négatif après.

— **Conclusion** : maximum en $x = \frac{10}{3}$ cm.

— **Volume maximal** :

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{3} \times \left(20 - \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \frac{1600}{9} = \frac{16\,000}{27} \approx 592{,}6 \text{ cm}^3$$

— **Contrôles** : $V(3) = 3 \times 196 = 588$ et $V(4) = 4 \times 144 = 576$ — tous deux inférieurs ✓

— **Contrôle de la dérivée** : $V'(3) = 14 \times 2 = 28 > 0$ ✓ et $V'(4) = 12 \times (-4) = -48 < 0$ ✓

— **Règle générale** : pour un carré de côté c, l'optimum est $x = \frac{c}{6}$ — ici $\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ ✓

Réponse. $x = \frac{10}{3}$ cm, pour un volume de $\frac{16\,000}{27} \approx 592{,}6$ cm³.

Correction de l'exercice 7 – Variations d'une fonction avec racine

La fonction racine carrée est dérivable pour $x > 0$, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour $x > 0$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le dénominateur $\sqrt{x}$ est positif, donc $f'(x)$ a le signe de $\sqrt{x} - 1$: négatif pour $0 < x < 1$, nul en 1, positif pour $x > 1$.

La fonction est donc **décroissante** sur $[0\,;1]$ et **croissante** sur $[1\,;+\infty[$. Elle atteint son minimum en 1 : $f(1) = 1 - 2 = -1$.

Contrôle : $f(0) = 0$, $f(0{,}25) = -0{,}75$ et $f(4) = 0$, tous supérieurs à -1. En posant $t = \sqrt{x}$, on retrouve ce résultat sans dériver : $f = t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1 \geq -1$. Le minimum vaut -1, atteint en $x = 1$.

Réponse. Décroissante sur $[0\,;1]$, croissante ensuite ; minimum -1 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 8 – Lecture d'un tableau de variations

— **Variations** : décroissante de 5 à -2, croissante de -2 à 6, décroissante de 6 à 1.
— **Extremums locaux** : minimum -2 en $x = -1$; maximum 6 en $x = 2$.
— **Extremums globaux** : maximum 6 en 2 ; minimum -2 en -1 ✓
— **Équation** $f(x) = 0$ — on examine chaque intervalle de monotonie :
— sur $[-3\,;-1]$: f décroît de 5 à -2, elle traverse 0 **une** fois ;
— sur $[-1\,;2]$: f croît de -2 à 6, elle traverse 0 **une** fois ;
— sur $[2\,;4]$: f décroît de 6 à 1, elle reste **strictement positive** — aucune solution.
— **Conclusion** : l'équation $f(x) = 0$ a exactement **deux** solutions ✓
— **Justification** : sur chaque intervalle, f est continue et **strictement monotone**, donc elle prend chaque valeur de son image **au plus une fois**.
— **Équation** $f(x) = 3$: une solution sur $[-3\,;-1]$, une sur $[-1\,;2]$, une sur $[2\,;4]$ — soit **trois** solutions ✓
— **Équation** $f(x) = 7$: **aucune** solution, car $7 > 6 = \max f$ ✓

Réponse. Max 6 en 2, min -2 en -1 ; $f(x) = 0$ a deux solutions.

Correction de l'exercice 9 – Fonction à paramètre

— **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 + a$.
— **Condition** : il faut $f'(x) \geq 0$ pour tout x, avec annulation en au plus un point.
— **Cas** $a \geq 0$: $3x^2 + a \geq 0$ toujours ✓ — la fonction est croissante.
— **Cas** $a < 0$: $f'(x) = 0$ pour $x = \pm\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$, et f' est **négative** entre ces deux racines — la fonction n'est pas monotone.
— **Conclusion** :

$$a \geq 0$$

— **Contrôles** : pour $a = 3$, $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$ ✓
— Pour $a = 0$, $f(x) = x^3$ est strictement croissante malgré $f'(0) = 0$ ✓
— Pour $a = -3$, $f'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en ± 1 et f a un maximum local en -1 ($f(-1) = 2$) et un minimum local en 1 ($f(1) = -2$) ✓
— **Lecture** : le paramètre a contrôle la « pente minimale » de la fonction en 0 ; dès qu'elle devient négative, deux extremums apparaissent.
— **Cas limite** $a = 0$: c'est le seul cas où la dérivée s'annule tout en conservant la stricte croissance.

Réponse. $a \geq 0$.

Correction de l'exercice 10 – Aire maximale d'un rectangle

— **Paramétrage** : le sommet supérieur droit est $(x\,;9 - x^2)$ avec $0 < x < 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Aire** : largeur $2x$, hauteur $9 - x^2$, donc

$$A(x) = 2x\left(9 - x^2\right) = 18x - 2x^3$$

— **Dérivée** : $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6\left(3 - x^2\right)$.

— **Racine positive** : $x = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$.

— **Signe** : positive avant $\sqrt{3}$, négative après — **maximum** en $x = \sqrt{3}$ ✓

— **Dimensions** : largeur $2\sqrt{3} \approx 3{,}4641$, hauteur $9 - 3 = 6$.

— **Aire maximale** :

$$A\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3} \approx 20{,}785$$

— **Contrôles** : $A(1{,}5) = 3 \times 6{,}75 = 20{,}25$ et $A(2) = 4 \times 5 = 20$ — tous deux inférieurs ✓

— **Contrôle de la dérivée** : $A'(1{,}5) = 18 - 13{,}5 = 4{,}5 > 0$ ✓ et $A'(2) = 18 - 24 = -6 < 0$ ✓

— **Propriété remarquable** : la hauteur optimale (6) vaut exactement les **deux tiers** de la hauteur de la parabole (9) — un résultat général pour ce type de problème ✓

Réponse. Largeur $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$, hauteur 6, aire $12\sqrt{3} \approx 20{,}79$.

Correction de l’exercice 11 – Variations d’une fonction homographique

— **Domaine** : $x \neq -2$.

— **Dérivée** : avec $u = 2x - 3$ et $v = x + 2$,

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x + 4 - 2x + 3}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

— **Signe** : $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq -2$.

— **Conclusion** : f est **strictement croissante** sur $]-\infty\,;-2[$ **et** sur $]-2\,;+\infty[$, séparément.

— **Attention** : elle n’est **pas** croissante sur la réunion ! $f(-3) = \dfrac{-9}{-1} = 9$ alors que $f(0) = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$ ✓

— **Contrôle par la formule** : $ad - bc = 2 \times 2 - (-3) \times 1 = 7 > 0$ ✓

— **Réécriture** : $f(x) = \dfrac{2(x+2) - 7}{x+2} = 2 - \dfrac{7}{x+2}$, d’où immédiatement $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2}$ ✓

— **Asymptotes** : $x = -2$ (verticale) et $y = 2$ (horizontale).

— **Aucun extremum** : la dérivée ne s’annule jamais ✓

— **Zéro** : $x = 1{,}5$; **ordonnée à l’origine** : $-1{,}5$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2} > 0$: croissante sur chaque intervalle, sans extremum.

Correction de l’exercice 12 – Coût moyen minimal

— **Coût moyen** :

$$M(q) = \frac{q^2 + 4q + 100}{q} = q + 4 + \frac{100}{q} \qquad \text{pour } q > 0$$

— **Dérivée** :

$$M'(q) = 1 - \frac{100}{q^2} = \frac{q^2 - 100}{q^2}$$

— **Racine positive** : $q = 10$.

— **Signe** : négative avant 10, positive après — **minimum** en $q = 10$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Coût moyen minimal** :

$$M(10) = 10 + 4 + 10 = 24$$

— **Contrôles** : $M(8) = 8 + 4 + 12{,}5 = 24{,}5$ et $M(12) \approx 12 + 4 + 8{,}333 = 24{,}333$ — tous deux supérieurs ✓

— **Propriété économique remarquable** : au minimum du coût moyen, le **coût marginal** $C'(q) = 2q + 4$ vaut $C'(10) = 24 = M(10)$ ✓

— **Démonstration** : $M'(q) = 0$ équivaut à $C'(q)q - C(q) = 0$, soit $C'(q) = \dfrac{C(q)}{q} = M(q)$ ✓

— **Lecture** : produire moins de 10 unités ne répartit pas assez les 100 € de coût fixe ; produire plus fait exploser le terme quadratique.

Réponse. $q = 10$, pour un coût moyen minimal de 24 (égal au coût marginal).

Correction de l'exercice 13 – Deux extremums à comparer

— **Dérivée** : $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\left(x^2 - 3x + 2\right) = 6(x-1)(x-2)$.

— **Racines** : $x = 1$ et $x = 2$.

— **Signe** : positive hors de $[1\,;2]$, négative à l'intérieur.

— **Valeurs** :

$$f(1) = 2 - 9 + 12 - 3 = 2 \qquad f(2) = 16 - 36 + 24 - 3 = 1$$

— **Extremums locaux** : maximum 2 en $x = 1$, minimum 1 en $x = 2$.

— **Bornes de l'intervalle** : $f(0) = -3$ et $f(3) = 54 - 81 + 36 - 3 = 6$.

— **Extremums globaux sur** $[0\,;3]$: maximum 6 en $x = 3$ et minimum -3 en $x = 0$ — **aux bornes** ✓

— **Conclusion** : les extremums locaux (2 et 1) ne sont **pas** globaux ✓

— **Contrôles** : $f(0{,}5) = 0{,}25 - 2{,}25 + 6 - 3 = 1$ ✓ ; $f(2{,}5) = 31{,}25 - 56{,}25 + 30 - 3 = 2$ ✓

— **Lecture du tableau** : f monte de -3 à 2, redescend à 1, puis remonte à 6 — une double « vague » typique du degré 3.

— **Amplitude de la vague centrale** : seulement 1 unité, d'où une courbe presque plate entre 1 et 2.

Réponse. Max local 2 en 1, min local 1 en 2 ; sur $[0\,;3]$ les extremums globaux sont -3 et 6, aux bornes.

Correction de l'exercice 14 – Distance minimale

La distance AM entre $A(0\,;3)$ et un point $M(x\,;x^2)$ de la parabole est positive : elle est minimale en même temps que son carré, plus simple à étudier.

$$d(x) = AM^2 = x^2 + \left(x^2 - 3\right)^2 = x^4 - 5x^2 + 9$$

On dérive : $d'(x) = 4x^3 - 10x = 2x\left(2x^2 - 5\right)$. Elle s'annule en 0 et en $\pm\sqrt{2{,}5} \approx \pm 1{,}58$. Le tableau de signes montre que d décroît jusqu'à $-\sqrt{2{,}5}$, croît jusqu'à 0, décroît jusqu'à $\sqrt{2{,}5}$ puis croît.

Les deux minimums valent $d\left(\pm\sqrt{2{,}5}\right) = 6{,}25 - 12{,}5 + 9 = 2{,}75$, contre $d(0) = 9$ au sommet de la parabole. Le point $(0\,;0)$ correspond à un maximum local de d, et non à un minimum.

Contrôle : $d(1) = 1 - 5 + 9 = 5$, compris entre 2,75 et 9. Les points les plus proches sont $\left(\pm\sqrt{2{,}5}\,;2{,}5\right)$, à la distance $\sqrt{2{,}75} \approx 1{,}66$ de A.

Réponse. Les deux points $\left(\pm\sqrt{2{,}5}\,;2{,}5\right)$, à la distance $\sqrt{2{,}75} \approx 1{,}66$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Fonction définie par morceaux

a) La tangente à la parabole $y = x^2$ au point d’abscisse 1 a pour équation $y = g'(1)(x-1) + g(1)$, avec $g(x) = x^2$: $g(1) = 1$ et $g'(1) = 2$. Donc

$$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$$

C’est exactement la droite qui définit f pour $x > 1$: la courbe de f se prolonge par sa tangente, sans cassure.

b) Pour $x < 1$, $f'(x) = 2x$, négative pour $x < 0$ et positive pour $0 < x < 1$; pour $x > 1$, $f'(x) = 2 > 0$. La fonction est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$, avec un minimum $f(0) = 0$.

Contrôle : $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(3) = 5$. Avec $3x - 2$ au lieu de $2x - 1$ pour $x > 1$, les deux morceaux se rejoindraient encore en $(1\,;1)$, mais avec un angle : la droite ne serait plus la tangente. Réponses : $y = 2x - 1$; minimum 0 en $x = 0$.

Réponse. a) la tangente en 1 est $y = 2x - 1$ · b) décroissante sur $]-\infty\,;0]$, croissante ensuite ; minimum 0 en $x = 0$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : étude complète

a) On dérive un quotient avec $u = x^2 - 4$ et $v = x - 1$, donc $u' = 2x$ et $v' = 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - \left(x^2 - 4\right)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

b) Le numérateur a pour discriminant $4 - 16 = -12 < 0$: il garde le signe de son coefficient dominant, il est toujours strictement positif. On le voit aussi en écrivant $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geq 3$. Le dénominateur est un carré non nul. Donc $f'(x) > 0$ et f est **strictement croissante** sur $]1\,;+\infty[$.

c) On résout $f(x) = 5$ sur $]1\,;+\infty[$: $x^2 - 4 = 5(x-1)$, soit $x^2 - 5x + 1 = 0$. Le discriminant vaut 21, d’où deux racines, $\frac{5-\sqrt{21}}{2} \approx 0{,}21$ et $\frac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4{,}79$. Seule la seconde appartient à $]1\,;+\infty[$: l’équation a **une seule** solution. C’est cohérent avec la stricte croissance, qui interdit à f de prendre deux fois la même valeur.

Contrôle : $f(4{,}79) = \frac{22{,}94 - 4}{3{,}79} \approx 5{,}0$. Réponses : $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$; strictement croissante ; une solution, $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Réponse. a) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$ · b) strictement croissante · c) une solution, $\frac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4{,}79$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).