

Plaquette 1 - Lire, justifier et exploiter les variations

Variations et extremums — Première spé maths

Exercices

Méthode

Cette plaquette travaille les variations **sans se limiter au calcul de dérivée** : taux de variation, forme canonique, fonctions de référence, lecture d'un tableau, comparaison de fonctions, nombre de solutions d'une équation. On finit par deux problèmes concrets d'optimisation.

Exercice 1 - Taux de variation

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 3, puis entre -3 et -1 . Interpréter les signes obtenus.

Exercice 2 - Démontrer une monotonie

Démontrer, à l'aide du taux de variation, que la fonction $f(x) = 3x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 - Forme canonique et extremum

Soit $f(x) = (x - 3)^2 + 2$.

- Donner l'extremum de f , sa nature et l'abscisse où il est atteint.
- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 - Maximum d'un trinôme

Soit $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$.

- Déterminer l'extremum de f .
- Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 5 - Exploiter un tableau de variations

Une fonction f définie sur $[-4; 6]$ a le tableau de variations suivant.

Intervalle	$[-4; -1]$	$[-1; 2]$	$[2; 6]$
Variations	croissante de -5 à 3	décroissante de 3 à -2	croissante de -2 à 7

- Donner le maximum et le minimum de f sur $[-4; 6]$.
- Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ?
- Résoudre graphiquement $f(x) = 3$.

Exercice 6 - Variations et dérivée

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et donner ses extremums locaux.

Exercice 7 - Comparer deux fonctions

Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ sur $]0; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.

Exercice 8 - Variations d'une fonction inverse translatée

Soit $f(x) = \frac{1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Étudier ses variations, d'abord sans dérivée puis en confirmant par le calcul.

Exercice 9 - Problème : trajectoire d'un ballon

La hauteur (en mètres) d'un ballon lancé verticalement est modélisée, t secondes après le lancer, par

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1$$

- a) À quel instant le ballon atteint-il sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?
- b) Au bout de combien de temps retombe-t-il au sol ? (Arrondir au centième de seconde.)

Exercice 10 - Problème : boîte de volume maximal

Dans une plaque carrée de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x , puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

- a) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte et préciser l'intervalle d'étude.
- b) Dériver V , puis déterminer la valeur de x qui rend le volume maximal et ce volume.

Exercice 11 - Synthèse : encadrement par les variations

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ étudiée sur $[0; 5]$.

- a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 5]$.
- b) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0; 5]$.
- c) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle sur $[0; 5]$?