Plaquette 1 – Lire, justifier et exploiter les variations

Variations et extremums — Première spé maths

Exercices

Méthode

Cette plaquette travaille les variations **sans se limiter au calcul de dérivée** : taux de variation, forme canonique, fonctions de référence, lecture d'un tableau, comparaison de fonctions, nombre de solutions d'une équation. On finit par deux problèmes concrets d'optimisation.

Exercice 1 – Taux de variation

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 3, puis entre -3 et -1. Interpréter les signes obtenus.

Exercice 2 – Démontrer une monotonie

Démontrer, à l'aide du taux de variation, que la fonction $f(x) = 3x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 – Forme canonique et extremum

Soit $f(x) = (x - 3)^2 + 2$.

a) Donner l'extremum de f, sa nature et l'abscisse où il est atteint.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 – Maximum d'un trinôme

Soit $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$.

a) Déterminer l'extremum de f.

b) Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 5 – Exploiter un tableau de variations

Une fonction f définie sur $[-4\,;6]$ a le tableau de variations suivant.

Intervalle	$[-4\,;-1]$	$[-1\,;2]$	$[2\,;6]$
Variations	croissante de -5 à 3	décroissante de 3 à -2	croissante de -2 à 7

a) Donner le maximum et le minimum de f sur $[-4\,;6]$.

b) Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ?

c) Résoudre graphiquement $f(x) = 3$.

Exercice 6 – Variations et dérivée

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et donner ses extremums locaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Comparer deux fonctions

Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ sur $]0\,;1[$ puis sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 8 – Variations d'une fonction inverse translatée

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Étudier ses variations, d'abord sans dérivée puis en confirmant par le calcul.

Exercice 9 – Problème : trajectoire d'un ballon

La hauteur (en mètres) d'un ballon lancé verticalement est modélisée, t secondes après le lancer, par

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1$$

a) À quel instant le ballon atteint-il sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

b) Au bout de combien de temps retombe-t-il au sol ? (Arrondir au centième de seconde.)

Exercice 10 – Problème : boîte de volume maximal

Dans une plaque carrée de 12 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

a) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte et préciser l'intervalle d'étude.

b) Dériver V, puis déterminer la valeur de x qui rend le volume maximal et ce volume.

Exercice 11 – Nombre dérivé et tangente

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3, puis dire si f est croissante ou décroissante au voisinage de 3.

Exercice 12 – Variations d'un quotient

Étudier les variations de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ sur $]-3\,;+\infty[$.

Exercice 13 – Problème : coût moyen minimal

Le coût total de fabrication de q objets est $C(q) = q^2 + 100$ euros, pour $q > 0$.
Déterminer la production qui rend le coût moyen $\dfrac{C(q)}{q}$ minimal, et ce coût moyen.

Exercice 14 – Extremums d'une cubique

Soit $f(x) = -x^3 + 3x + 2$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et donner ses extremums locaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : encadrement par les variations

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ étudiée sur $[0\,;5]$.

a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.

b) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0\,;5]$.

c) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle sur $[0\,;5]$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).